

Elementaire Deeltjes en Groepentheorie

Geert Gordebeke

8 juli 2009

Inhoudsopgave

Inleiding.....	3
Introductie Young Tableaux.....	4
Young diagram.....	4
Young tableau.....	4
Young tabloid.....	5
SU(N).....	6
Vermenigvuldigen van Young diagrammen in SU(N).....	7
Introductie gebruikte groepen.....	10
U(1).....	10
SU(2).....	10
SU(3).....	11
Elementaire deeltjes.....	14
Symmetrie van de Elektromagnetische Wisselwerking: U(1).....	15
Symmetrie van de Zwakke Isospin: SU(2).....	15
Symmetrie van de Sterke wisselwerking: SU(3).....	16
Symmetrie van de Sterke Isospin: SU(2).....	16
Smaaksymmetrie: SU(3).....	17
Baryonen.....	18
Strangeness.....	19
Charm.....	21
Bottomness.....	22
Pseudoscalaire Mesonen.....	23
Strangeness.....	24
Charm.....	25
Bottomness.....	26
Vector Mesonen.....	26
Strangeness.....	27
Charm.....	28
Bottomness.....	28
Het achtvoudige pad.....	29
Eisen aan een elementair deeltje.....	31
Expansie Elementaire Deeltjes en Groepentheorie.....	36
Aanpassing kleursymmetrie.....	36
Exotische Baryonen en Hadronen.....	38
Exotisch Baryon.....	38
Exotisch Hadron.....	39
Referenties.....	40

Inleiding

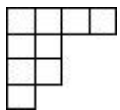
Hoewel groepentheorie een toch voornamelijk wiskundig onderwerp is, kan zij gebruikt worden om een inzicht te krijgen in de elementaire deeltjes. In dit verslag worden met behulp van Young tableaux de symmetrische en anti-symmetrische aspecten van elementaire deeltjes bekeken. Deze tableaux worden gebruikt om op een gemakkelijke en intuïtieve wijze groepentheorie en elementaire deeltjes met elkaar te combineren. De noodzakelijke groepen hiervoor zullen worden uitgewerkt, waarna deze verbonden worden met de aspecten van de elementaire deeltjes. Vervolgens wordt er naar het achtvoudige pad gewerkt en wordt er gekeken waaraan elementaire deeltjes moeten voldoen. Ten slotte sluit ik af door de kennis van groepentheorie een stap verder te nemen dan dat wat al bekend is en behandel ik een wat als scenario, en ga ik verder met de eisen waaraan elementaire deeltjes moeten voldoen.

Introductie Young Tableaux

Een Young tableaux zijn objecten waarmee op een gemakkelijke en grafische manier representaties van lineaire groepen en symmetrische groepen weer te geven zijn. Young tableaux representeren een proces van symmetrisatie en anti-symmetrisatie van een gegeven tensor voor een bepaalde irreducibele representatie. Deze symmetrisatie en anti-symmetrisatie komt tot uitdrukking bij Young Tableaux in de vorm van een dergelijk tableau. Vierkantjes die naast elkaar staan (horizontaal) geven een symmetrische relatie weer tussen de vierkantjes. Vierkantjes die onder elkaar staan (verticaal) geven een anti-symmetrische relatie weer tussen de vierkantjes. Bij een diagram en tableau zijn er evenveel vierkantjes als er indices van de tensor zijn.

Young diagram

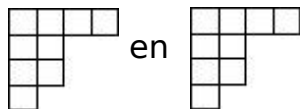
Een Young diagram bestaat uit een eindige hoeveelheid vierkantjes die op zo'n manier gestapeld worden zodat de onderliggende rijen nooit meer vierkantjes hebben dan de bovenliggende. Ook wordt het geheel naar links uitgelijnd. Het volgende diagram illustreert dit:



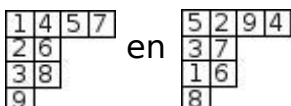
Hierbij zijn 9 vierkantjes in 4 rijen gestapeld. Geen enkele rij bevat meer vierkantjes dan de bovenliggende rij. Waarbij het wel zo is dat rij 2 en 3 evenveel vierkantjes hebben, doch niet meer vierkantjes en is daarom toegestaan.

Young tableau

Een Young tableau is een Young diagram waarbij de nummers $\{1, \dots, n\}$ zijn ingevuld in de vierkantjes. Bij een tableau is het van belang hoe de nummers zijn ingevuld. Dus waarbij de diagrammen:



hetzelfde zijn, geldt voor:



dat deze verschillend zijn. Beide tableaux zijn toegestaan. Doch voor sommige groepen is het noodzakelijk dat de tableaux semistandaard zijn.

Semistandaard houdt in dat een Young tableau aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. Elke rij bevat niet meer vierkantjes dan de rij daarboven;
2. De waarde van een vierkantje is groter of gelijk aan de waarde van het vierkantje naast hem;
3. De waarde van een vierkantje is groter dan de waarde van het vierkantje boven hem.

Als deze regels toegepast worden op beide tableaux hierboven dan blijft alleen het volgende tableau over als zijnde semistandaard:

1	4	5	7
2	6		
3	8		
9			

Young tabloid

Hoewel het tekenen van een Young diagram of tableau wel duidelijkheid laat zien hoe het desbetreffende Young diagram of tableau er ook daadwerkelijk uitziet, is het niet altijd de meest snelle of compacte manier om zoiets te noteren. De verkorte notatie van Young diagrammen of tableaux zijn Young tabloids. Er zijn twee manieren om Young diagrammen te schrijven, deze hangen af of het tabloid een diagram of een tableau beschrijft.

Een diagram wordt geschreven door het aantal vierkantjes per rij op te tellen en vervolgens achter elkaar te zetten:

$$\text{Young tabloid } (N \text{ rijen}) = (\text{vierkantjes rij } 1, \text{vierkantjes rij } 2, \dots, \text{vierkantjes rij } N)$$

Het voorbeeld dat gebruikt is bij de beschrijving van het Young diagram:

Wordt op die manier: (4,2,2,1)

Bij een tableau gaat het iets anders. Hier is het gebruikelijk om de waarden van de vierkantjes te noteren. Hier worden de waarden van de vierkantjes tussen {} geschreven en vervolgens achter elkaar gezet:

$$\text{Young tabloid} = \{ \text{waarde eerste vierkantje rij } 1, \dots, \text{waarde laatste vierkantje rij } 1 \}$$

$$\{ \text{waarde eerste vierkantje rij } 2, \dots, \text{waarde laatste vierkantje rij } 2 \}$$

⋮

$$\{ \text{waarde eerste vierkantje rij } N, \dots, \text{waarde laatste vierkantje rij } N \}$$

De voorbeelden die gebruikt zijn bij de beschrijving het Young tableau:

1	4	5	7
2	6		
3	8		
9			

en

5	2	9	4
3	7		
1	6		
8			

Worden dan op die manier: {1,4,5,7}{2,6}{3,8}{9} en {5,2,9,4}{3,7}{1,6}{8}

$SU(N)$

De representaties van de groep $SU(N)$ kunnen met behulp van Young tableau worden weergegeven. De Young tableaux die gebruikt worden zijn in dit geval semistandaard alsmede dat ze nooit meer dan N rijen hebben. Dit laatste is gemakkelijk in te zien omdat de hoeveelheid getallen die ingevuld kunnen worden in de tableaux gelimiteerd is tot N . Als voorbeeld kan hier $SU(2)$ genomen worden. Deze kan maximaal 2 getallen invullen: 1 en 2. Als wij hier een tableau nemen met 3 rijen komen we in de problemen omdat dat tableau niet legaal te maken is:

1
2
!

Hier kunnen er geen legale waarden voor het ! teken gekozen worden. Zo'n tableau is dus voor $SU(2)$ niet toegestaan.

Vanwege de eigenschappen van een semistandaard Young tableau zijn er altijd volledig symmetrische tableaux te vormen voor $SU(N)$. Dit geldt niet altijd voor volledig anti-symmetrische tableaux. Want als voor het aantal indices van de tensor M geldt dat: $M > N$ met N van $SU(N)$, dan zijn er meer vierkantjes dan dat er toegestane rijen zijn en zoals hierboven ook al is bewezen kunnen dus niet alle vierkantjes volledig verticaal (volledig anti-symmetrisch) geplaatst worden. Daarom zullen er in dat geval altijd $M-N$ symmetrische elementen in zo'n tableau zitten.

Bij $SU(N)$ worden meestal alleen de Young diagrammen gegeven en hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om Young tableaux te maken van die diagrammen. Dit omdat het meestal alleen interessant is om te weten welke mogelijke Young diagrammen er zijn en daardoor te weten welke mogelijkheden van symmetrisatie en anti-symmetrisatie er zijn. De hoeveelheid mogelijkheden wordt erbij vermeldt om zeker te zijn dat alle mogelijke diagrammen gegeven zijn. Dit wordt berekend volgens de volgende formule bij $SU(N)$:

$$\text{aantal mogelijkheden} = N^{\text{aantal vierkantjes}} = \sum_{\text{alle diagrammen}} \text{aantal mogelijke tableaux van een diagram}$$

Vermenigvuldigen van Young diagrammen in $SU(N)$

Omdat het meestal alleen interessant is bij $SU(N)$ om de Young diagrammen te bekijken, wordt bij het vermenigvuldigen altijd eerst de diagrammen met elkaar vermenigvuldigd. Daarna kunnen de diagrammen die uit de vermenigvuldiging gekomen zijn ingevuld worden om er Young tableaux van te maken.

Het vermenigvuldigen van twee diagrammen gaat volgens de volgende regels:

1. Schrijf beide diagrammen op, noem de eerste T_1 en de tweede T_2 .
2. Geef de rijen van T_2 olopende nummers van $1 \dots N$ waarbij N het aantal rijen is van T_2 .
3. Voeg de vierkantjes van T_2 een voor een toe aan T_1 , beginnende bij de vierkantjes met de laagste nummers en eindigend met de vierkantjes met de hoogste nummers. Voor elk vierkantje dat toegevoegd wordt moet gelden:
 1. Elke keer als een vierkantje wordt toegevoegd moet T_1 een geldig Young tableau blijven.
 2. Vierkantjes met hetzelfde nummer mogen niet in dezelfde kolom terecht komen;
4. Nadat alle vierkantjes zijn toegevoegd worden de nummers van rechts naar links per rij beginnende bij de bovenste rij en eindigend met de onderste rij gelezen. Voor deze rij van getallen moet het volgende gelden: Voor elk willekeurig getal uit de rij dient te gelden dat links van dat getal er niet meer 2'en dan 1'en zijn, er niet meer 3'en dan 2'en zijn, etc. Ofwel voor een willekeurig getal uit de rij geldt: $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \dots$ Waarbij n_1 het aantal 1'en is, n_2 het aantal 2'en, etc.
5. Als twee tableaux van dezelfde vorm geproduceerd worden, dan zijn zij alleen verschillend als de getallen in de toegevoegde vierkantjes anders gedistribueerd zijn.
6. Haal kolommen met N vierkantjes weg, deze corresponderen alleen maar met triviale representaties van $SU(N)$. Doch niet wanneer het tableau alleen maar uit die kolom bestaat.

De volgende twee voorbeelden illustreren deze regels. Allereerst worden 3 tableaux bestaande uit maar een index (en daarmee ook maar 1 vierkantje) met elkaar vermenigvuldigd:

$$\boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} = \left(\boxed{12} \oplus \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}} \right) \otimes \boxed{3} = \boxed{123} \oplus \boxed{\begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \end{smallmatrix}} \oplus \boxed{\begin{smallmatrix} 13 \\ 2 \end{smallmatrix}} \oplus \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$$

Hierbij zijn alle drie de tableaux een nummer gegeven, zodat te zien is dat bij het eindresultaat $\{1,2\}\{3\}$ en $\{1,3\}\{2\}$ verschillend zijn. Hierbij is het laatste tableau $\{1\}\{2\}\{3\}$ triviaal. Een opmerking bij deze vermenigvuldiging: De nummers die hierbij zijn gebruikt dienen slechts ter identificatie van de vierkantjes. De uitkomst bestaat dus uit Young diagrammen en niet uit Young tableaux. Deze worden verkregen door het invullen van de diagrammen met de correcte indices van $SU(N)$.

Ten slotte is er nog een makkelijke manier om na te gaan of een vermenigvuldiging juist is uitgevoerd en of alle Young diagrammen gevonden zijn. Men telt alle mogelijke Young diagrammen voor het = teken op, en dat moet dan gelijk zijn aan alle mogelijke Young diagrammen na het = teken. Voor de eerste vermenigvuldiging van hierboven:

$$\boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} = \left(\boxed{12} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array} \right) \otimes \boxed{3} = \boxed{123} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \boxed{12} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \boxed{13} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array}$$

levert dat de volgende formule op voor SU(3):

$$3 \times 3 \times 3 = (6+3) \times 3 = 10+8+8+1$$

$$9 \times 3 = 9 \times 3 = 18+9$$

$$27 = 27 = 27$$

Hieruit valt af te leiden dat de bovenstaande vermenigvuldiging volledig is. Wanneer er voortaan een vermenigvuldiging onder een Young diagram staat, dan is dat om na te gaan of de vermenigvuldiging correct is. En ook ter indicatie van hoeveel mogelijke toegestane Young Tableaux er van een Young diagram gemaakt kunnen worden.

Introductie gebruikte groepen.

De groepen die hier gebruikt worden zijn $U(1)$, $SU(2)$ en $SU(3)$. $U(1)$ is in dit geval een triviaal element en is daarom ook minder uitgewerkt.

$U(1)$

Dit zijn de unitaire groepen van de eerste orde. Voor $U(1)$ geldt:

$$U(1) \simeq SO(2)$$

$SO(2)$ is hier de cirkelgroep. Deze groep bevat alle transformaties over een hoek φ . $U(1)$ is een Abelse groep.

$SU(2)$

Dit is de speciale unitaire groep van de tweede orde. $N = 2$, en daarom kunnen er nooit meer dan 2 rijen zijn. Als deze groep wordt uitgewerkt in Young diagrammen komt het volgende eruit:

Voor 2 tensors:

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times 2 = 3 + 1$$

Hieruit valt af te leiden, dat wanneer de diagrammen worden uitgewerkt tot tableaux er 3 symmetrische en 1 anti-symmetrische mogelijkheden zijn.

Voor 3 tensors:

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 2 = (3+1) \times 2 = 4+2+2$$

Bij drie tensors zijn er dus geen volledig anti-symmetrische mogelijkheden mogelijk.

Voor 4 tensors:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 5+3+1+3+1+3$$

En 5 tensors:

$$\begin{aligned}
 \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \square \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \\
 &\oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 &= \square \square \square \square \oplus \square \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \\
 &\oplus \square \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square \oplus \square \square
 \end{aligned}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 6 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4$$

SU(3)

Dit is de speciale unitaire groep van de derde orde. $N = 3$, en daarom kunnen er nooit meer dan 3 rijen zijn. Als deze groep wordt uitgewerkt in Young diagrammen komt het volgende eruit:

Voor 2 tensors:

$$\square \otimes \square = \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$3 \times 3 = 6 + \bar{3}$$

Voor 3 tensors:

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) \otimes \square = \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$3 \times 3 \times 3 = (6 + \bar{3}) \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1$$

Hier is dus voor 3 tensors wel een volledig anti-symmetrische mogelijkheid mogelijk, dit in tegenstelling tot SU(2).

Voor 4 tensors wordt het:

$$\begin{aligned}
 \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \square \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\
 &= \square \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \square
 \end{aligned}$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 15 + 3 + 6 + 15 + 3 + 6 + 15 + 3 + 15$$

Elementaire deeltjes

Binnen de elementaire deeltjes zijn de groepen $U(1)$, $SU(2)$ en $SU(3)$ van belang. Van deze groepen is $U(1)$ een triviale groep, die daarom hier ook niet in detail besproken zal worden. $SU(2)$ en $SU(3)$ daarentegen zullen hier met behulp van Young tableaux besproken worden.

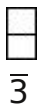
Binnen de kwantummechanica worden de tensors die de Young tableaux representeren gekoppeld aan behouden kwantumgetallen. De drie behouden kwantumgetallen binnen de kwantummechanica zijn lading, isospin en kleur. Juist omdat deze getallen behouden zijn, kunnen ze met behulp van groepentheorie in Young tableaux worden uitgedrukt. Lading/EM-wisselwerking wordt beschreven door $U(1)$, isospin door $SU(2)$ en kleur door $SU(3)$. Daarnaast zal ook nog Sterke Isospin geïntroduceerd worden vanwege historische redenen die in een later hoofdstuk zullen worden toegelicht. Ten slotte wordt smaak nog behandeld met behulp van Young tableaux, dit omdat smaak beschreven kan worden door $SU(3)$. Van smaak zullen Charm, Bottomness and Strangeness besproken worden, Truth zal hier weggelaten worden omdat het top quark zo'n korte levensduur heeft dat er geen hadronen gevormd kunnen worden met dat quark.

De hoeveelheid kwantumgetallen is afhankelijk van de hoeveelheid elementaire deeltjes er zijn. Voor 2 elementaire deeltjes bijvoorbeeld zullen er 2 kwantumgetallen voor isospin zijn. Daarom is de hoeveelheid deeltjes gelijk aan de hoeveelheid vierkantjes die in een Young diagram zijn. Een uitzondering hierop is wanneer een Young diagram versimpeld is door vermenigvuldigingsregel 5. Doch voor het opbouwen van Young diagrammen zullen altijd evenveel vierkantjes als deeltjes gebruikt worden.

De anti-deeltjes worden op een speciale manier door Young diagrammen beschreven. Binnen $SU(N)$ wordt een anti-deeltje uitgedrukt door een volledig anti-symmetrisch Young Tableaux bestaande uit $N-1$ vierkantjes. Voor $SU(2)$ krijgen we dan maar een vierkantje ($2-1 = 1$ vierkantje). Doch voor $SU(3)$, krijgen we dan:



Als we dat uitwerken in Young diagrammen, dan komen er netjes 3 mogelijke tableaux uit. Voor $SU(4)$ en verder gaat het op een zelfde manier. Bij het uitrekenen van het aantal mogelijkheden wordt voor een anti-deeltje en ook voor Young diagrammen die exact dezelfde vorm hebben als een Young diagram van een anti-deeltje, het aantal mogelijkheden met een streep erboven genoteerd. Voor het bovenstaande diagram in $SU(3)$ zouden er dus:



Mogelijkheden zijn. Bij het beschrijven van elementaire deeltjes bestaande uit onder andere anti-deeltjes met Young diagrammen dient met de bovenstaande zaken rekening gehouden te worden.

Symmetrie van de Elektromagnetische Wisselwerking: $U(1)$

Zoals bij de introductie van de groep al is gezegd, is deze groep equivalent met $SO(2)$, de rotatiesymmetrie om een bepaalde hoek. Vanwege deze symmetrie moet het niet uitmaken voor de wisselwerking als je om een bepaalde as draait. Waarbij de as langs de spinvector ligt. Hieruit volgt dat alleen de straal er toe doet als de wisselwerking bekeken wordt, en dat de hoek met het deeltje er niet toe doet. Dit zit al in de elektromagnetische wisselwerkingen, en daarom is $U(1)$ een goede representatie ervoor. Doch omdat er maar een symmetrische component is voor de elektromagnetische wisselwerking is zij daarmee ook de minst interessante om te bekijken.

Symmetrie van de Zwakke Isospin: $SU(2)$

Dit is de symmetrie van de spin ruimte. We nemen hier alleen de symmetriestabiliteit van de linkshandige deeltjes. Zo hoeft er geen onderscheid gemaakt te worden tussen $SU(2)$ linkshandig en $SU(2)$ rechtshandig. De Young diagrammen zijn uitgewerkt in de introductie van $SU(2)$. Een simpel voorbeeld illustreert hoe het beschrijven van symmetrische en anti-symmetrische eigenschappen van deeltjes met Young tableaux hier heel mooi tot uiting komt:

We nemen 2 fermionen, elk met een bepaalde spin. We definiëren spin up als zijnde 1 en spin down als zijnde 2. Als we dit gaan uitwerken met behulp van Young tableaux dan krijgen we:

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Hier zijn er dus 3 symmetrische oplossingen en 1 anti-symmetrische oplossingen. Net zoals er bij een standaard kwantummechanische oplossing is. We kunnen dit resultaat direct aan de kwantummechanische oplossing koppelen:

$$\{1,1\}: \Psi = \psi_1(\uparrow) \psi_2(\uparrow)$$

$$\{1,2\}: \Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\uparrow) \psi_2(\downarrow) + \psi_1(\downarrow) \psi_2(\uparrow))$$

$$\{2,2\}: \Psi = \psi_1(\downarrow) \psi_2(\downarrow)$$

$$\{1\}\{2\}: \Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\uparrow) \psi_2(\downarrow) - \psi_1(\downarrow) \psi_2(\uparrow)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_1(\uparrow) & \psi_1(\downarrow) \\ \psi_2(\downarrow) & \psi_2(\uparrow) \end{vmatrix}$$

Hier is de koppeling tussen de kwantummechanische triplet en singlet toestanden van de spin duidelijk te zien.

Voor meerdere deeltjes kunnen de uitgewerkte Young diagrammen genomen worden van de introductie van $SU(2)$. Hierbij geldt wel dat voor meer dan 2 deeltjes er geen volledig anti-symmetrische diagrammen gevormd kunnen worden en er dus ook geen volledig anti-symmetrische toestanden voor de spin zijn.

Symmetrie van de Sterke wisselwerking: SU(3)

Dit is kleursymmetrie en is gekoppeld aan SU(3). Als we dit uitwerken voor een deeltje en een anti-deeltje, een meson, dan krijgen we:

$$\square \otimes \bar{\square} = \square \oplus \bar{\square}$$

$$3 \times \bar{3} = 8 + 1$$

Waarbij de diagrammen:

$$(2,1): \frac{r\bar{b}+b\bar{r}}{\sqrt{2}}, \frac{-i(r\bar{b}-b\bar{r})}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{r}-b\bar{b}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{g}+g\bar{r}}{\sqrt{2}}, \frac{-i(r\bar{g}-g\bar{r})}{\sqrt{2}}, \frac{b\bar{g}+g\bar{b}}{\sqrt{2}}, \frac{-i(b\bar{g}-g\bar{b})}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{r\bar{r}+b\bar{b}-2g\bar{g}}{\sqrt{6}}$$

het kleur octet vormen, en

$$(1,1,1): \frac{r\bar{r}+b\bar{b}+g\bar{g}}{\sqrt{3}}$$

het kleur singlet vormt. Binnen de Quantum Chromo Dynamica zijn deze 9 mogelijkheden de 9 mogelijke gluonen. Het enige probleem hier is het kleur singlet, en als die zou bestaan, zou dat inhouden dat dat gluon als een vrij deeltje zou kunnen bestaan. Iets wat de huidige kennis van elementaire deeltjes verbiedt.

Voor 3 deeltjes, 2 deeltjes en 2 anti-deeltjes en 4 deeltjes en een anti-deeltje kunnen de uitwerkingen genomen worden van de introductie SU(3). Waarbij geldt dat bij meer dan 3 deeltjes er geen volledig anti-symmetrische mogelijkheden meer zijn.

Symmetrie van de Sterke Isospin: SU(2)

Goed beschouwd is dit de smaaksymmetrie van het up en down quark. Het upquark heeft een Sterke Isospin van $\frac{1}{2}$ en het down een van $-\frac{1}{2}$. Net zoals spin wordt de Sterke Isospin ook door SU(2) bepaald. Door gebruik te maken van Young tableaux kunnen we nu het proton schrijven als:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline u & u \\ \hline d & \\ \hline \end{array}$$

en het neutron als:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline u & d \\ \hline d & \\ \hline \end{array}$$

De sterke isospin wordt alleen bij deeltjes die alleen uit up of down quark beschouwd. Zodra er andere quarks bij komen wordt er naar de smaak van die andere quarks gekeken voor symmetrie eigenschappen.

Smaaksymmetrie: $SU(3)$

Deze symmetrie bestaat uit het up quark, het down quark en een quark van een andere familie. De symmetrie wordt beschreven door $SU(3)$, en maakt daardoor gebruik van dezelfde Young diagrammen als kleur.

Voor mesonen (quark + anti-quark) geldt:

$$\square \otimes \bar{\square} = \square \oplus \bar{\square}$$

$$3 \times \bar{3} = 8 + 1$$

Het eindresultaat is dus een smaak octet en een smaak singlet.

Voor baryonen (3 quarks) geldt:

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \bar{\square}) \otimes \square = \square \oplus \bar{\square} \oplus \bar{\square} \oplus \square$$

$$3 \times 3 \times 3 = (6 + \bar{3}) \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1$$

Het eindresultaat is dus een smaak decuplet, 2 smaak octets en een smaak singlet. Het mooie van smaak is dat de uitgewerkte Young tableaux van zo'n Young diagram heel mooi grafisch weergegeven kunnen worden. Bijna alle Young tableaux zijn in de smaaksymmetrie ook daadwerkelijk deeltjes. Zoals al van te voren gemeld is, is de smaak Truth van het top-quark weggelaten. Dit omdat het top-quark zo'n korte levensduur heeft dat het geen baryonen kan vormen.

Baryonen

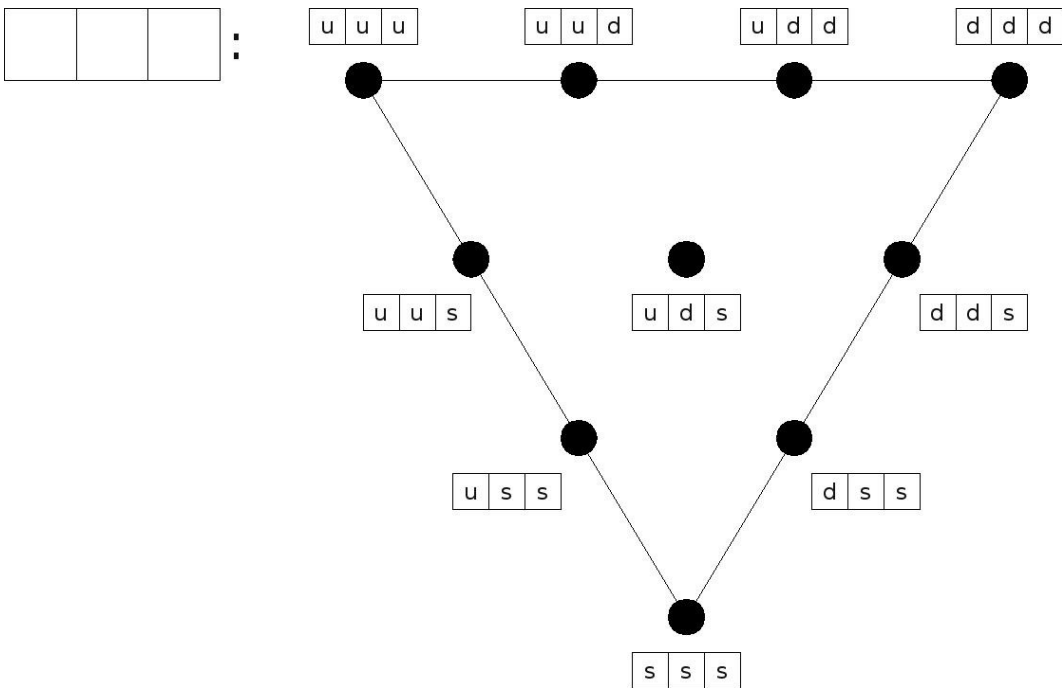
De lijst van gebruikte baryonen is weergegeven in tabel 1. Er zijn vanzelfsprekend meer baryonen. Doch in dit geval zijn alleen de baryonen in tabel 1 van belang.

Naam deeltje	Symbol	Quark inhoud	Rustmassa (MeV/c ²)	Isospin	Lading (Q)	Strangeness (S)	Charm (C)	Bottomness (B)	I _z	Hypercharge (Y)
Delta	Δ^{++}	uuu	1,232 ± 1	1,5	2	0	0	0	1,5	1
Delta	Δ^+	uud	1,232 ± 1	1,5	1	0	0	0	0,5	1
Delta	Δ^0	udd	1,232 ± 1	1,5	0	0	0	0	-0,5	1
Delta	Δ^-	ddd	1,232 ± 1	1,5	-1	0	0	0	-1,5	1
Sigma	Σ^{++}	uus	1,382.8 ± 0.4	1	1	-1	0	0	1	0
Sigma	Σ^{*0}	uds	1,383.7 ± 1.0	1	0	-1	0	0	0	0
Sigma	Σ^{*-}	dds	1,387.2 ± 0.5	1	-1	-1	0	0	-1	0
Xi	Ξ^{*0}	uss	1,531.80 ± 0.32	0,5	0	-2	0	0	0,5	-1
Xi	Ξ^{*-}	dss	1,535.0 ± 0.6	0,5	-1	-2	0	0	-0,5	-1
Omega	Ω^-	sss	1,672.45 ± 0.29	0	-1	-3	0	0	0	-2
Charmed Sigma	Σ^{*+}_c	uuc	2,518.4 ± 0.6	1	2	0	1	0	1	2
Charmed Sigma	Σ^{*0}_c	udc	2,517.5 ± 2.3	1	1	0	1	0	0	2
Charmed Sigma	Σ^{*0}_c	ddc	2,518.0 ± 0.5	1	0	0	1	0	-1	2
Double charmed Xi	Ξ^{*+}_{cc}	ucc	Onbekend	0,5	2	0	2	0	0,5	3
Double charmed Xi	Ξ^{*0}_{cc}	dcc	Onbekend	0,5	1	0	2	0	-0,5	3
Triple charmed Omega	Ω^{*+}_{ccc}	ccc	Onbekend	0	2	0	3	0	0	4
Bottom Sigma	Σ^{*+}_b	uub	5,829.0 ± 3.4	1	1	0	0	-1	1	0
Bottom Sigma	Σ^{*0}_b	udb	Onbekend	1	0	0	0	-1	0	0
Bottom Sigma	Σ^{*-}_b	ddb	5,836.4 ± 2.8	1	-1	0	0	-1	-1	0
Double bottom Xi	Ξ^{*0}_{bb}	ubb	Onbekend	0,5	0	0	0	-2	0,5	-1
Double bottom Xi	Ξ^{*-}_{bb}	dbb	Onbekend	0,5	-1	0	0	-2	-0,5	-1
Triple bottom Omega	Ω^-_{bbb}	bbb	Onbekend	0	-1	0	0	-3	0	-2

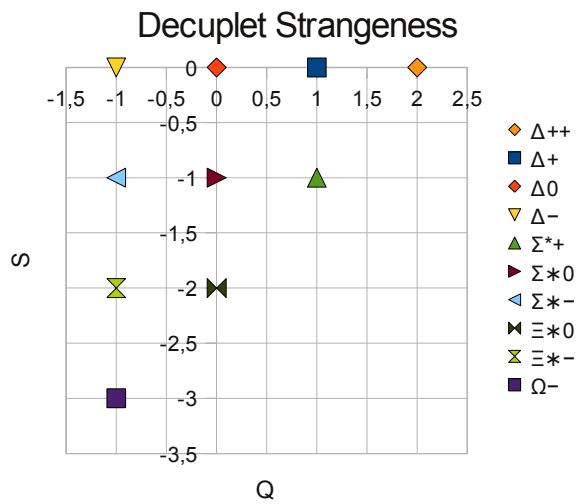
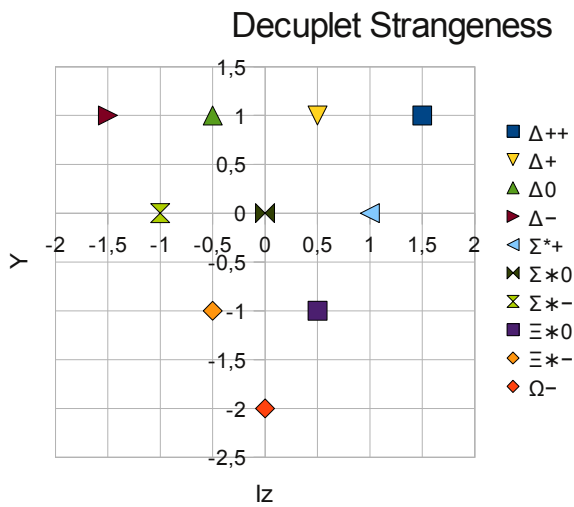
Tabel 1: Lijst van baryonen die gebruikt worden in smaaksymmetrie

Strangeness

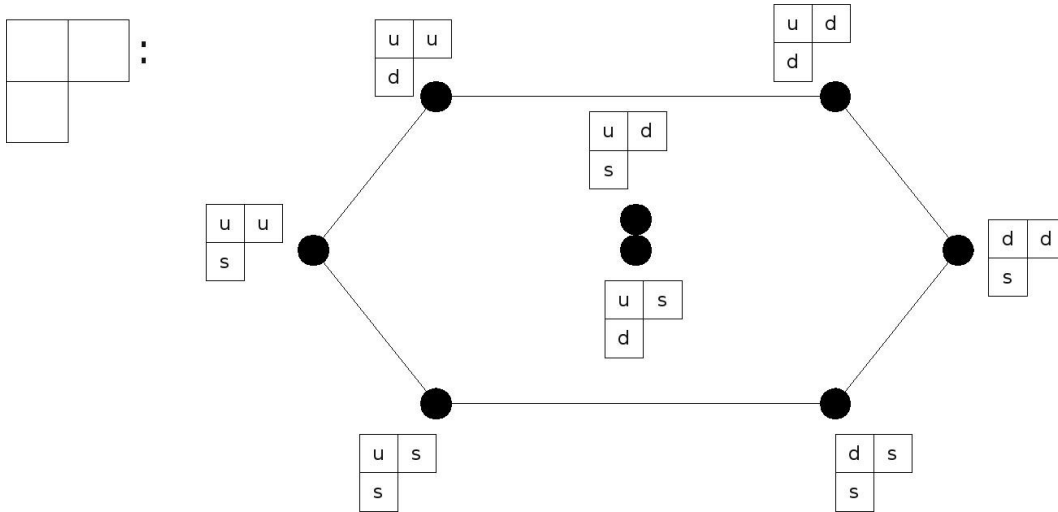
Allereerst is er de smaaksymmetrie Strangeness, bestaande uit een up, down en strange quark. De decuplet van strangeness is als volgt opgebouwd:



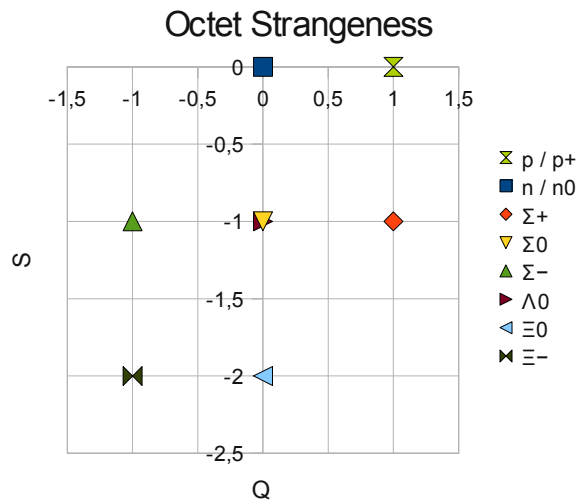
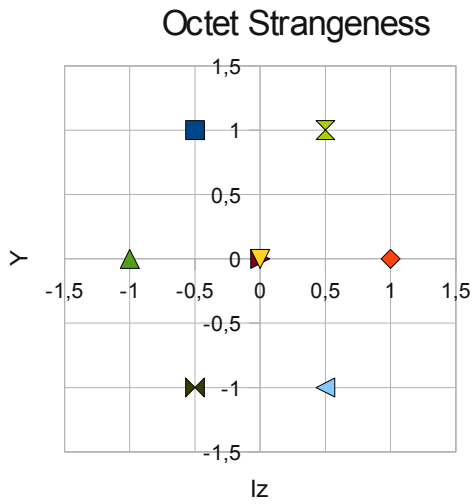
Waarbij de bovenstaande vorm afkomstig is van:



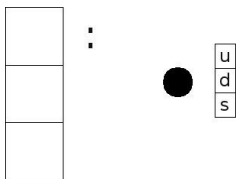
De octet van strangeness is als volgt opgebouwd:



Waarbij de bovenstaande vorm afkomstig is van:



En ten slotte de singlet van strangeness:

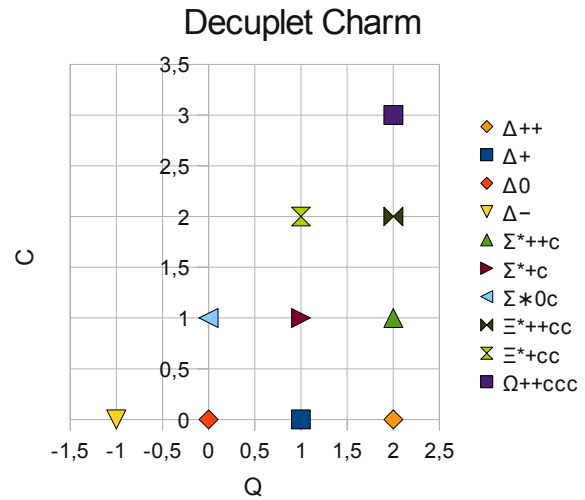
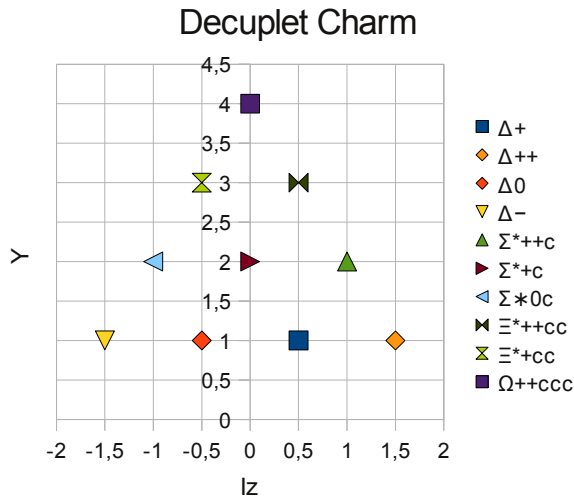


Dit deeltje blijkt niet te bestaan voor SU(3) smaak.

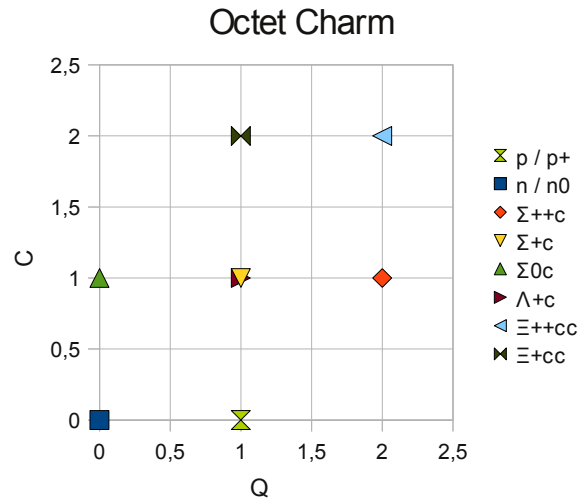
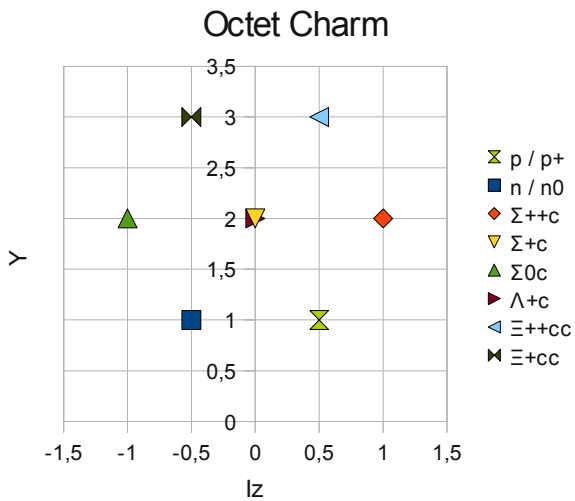
Charm

Voor Charm, bestaande uit een up, down en charm quark, gaat het praktisch hetzelfde als strangeness. Alleen het s quark wordt in dit geval vervangen door een c quark. Ook dit levert de volgende plaatjes op:

(3):



(2,1):

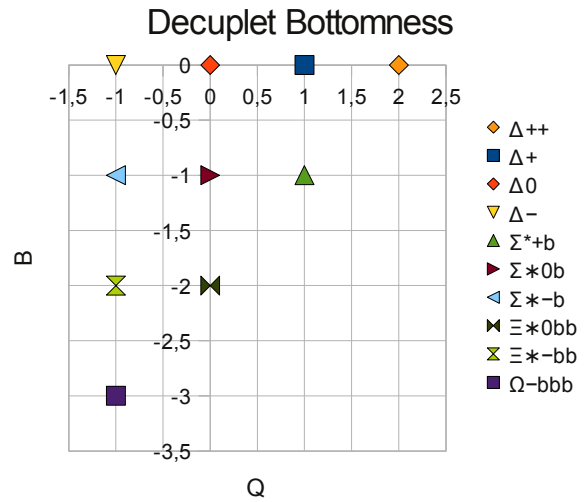
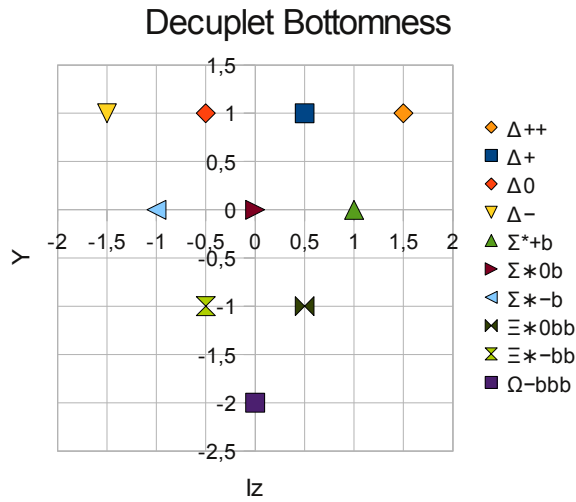


En ook hier blijkt de singlet niet te bestaan.

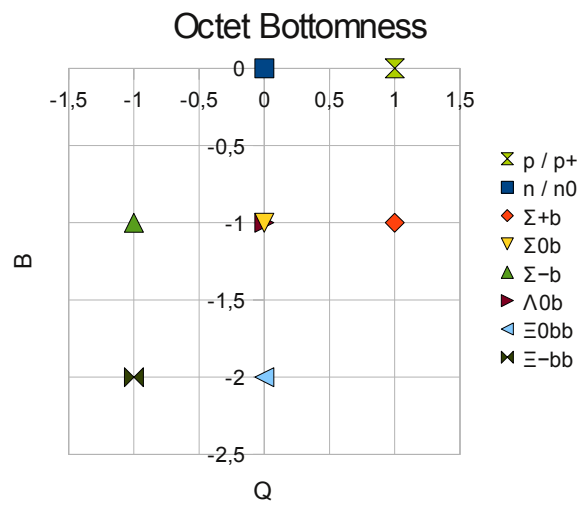
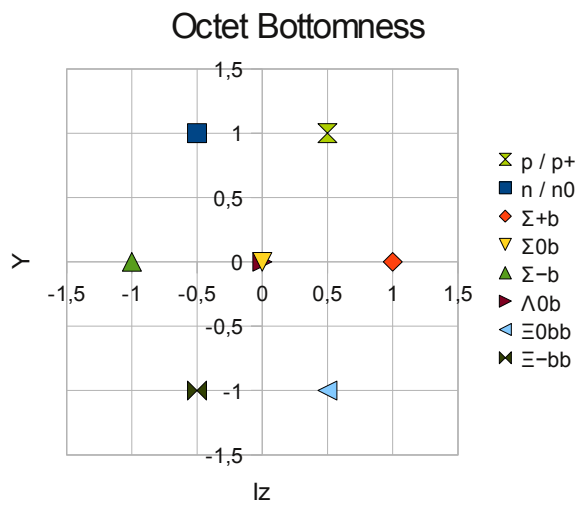
Bottomness

Bottomness, bestaande uit een up, down en bottom quark, gaat net zoals bij Strangeness en Charm. De volgende plaatjes worden hier gevonden:

(3):



(2,1):



Pseudoscalaire Mesonen

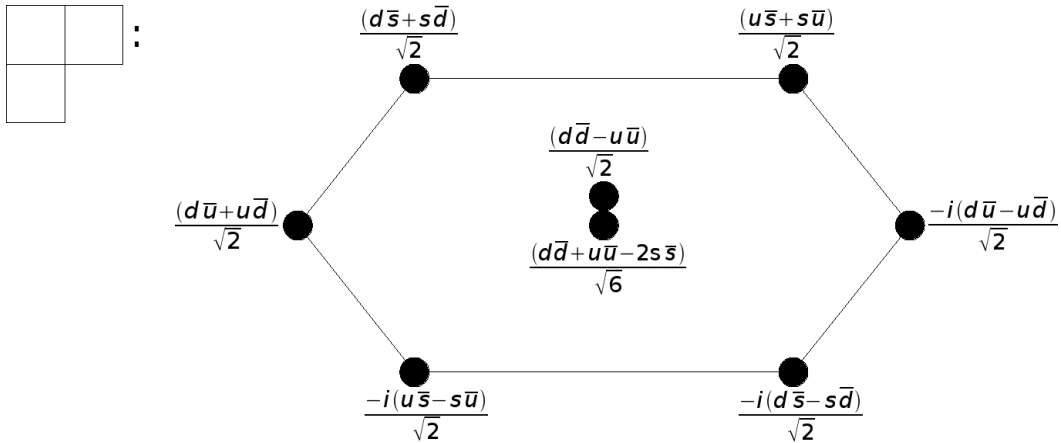
De lijst van gebruikte pseudoscalaire mesonen is weergegeven in tabel 2. Er zijn vanzelfsprekend meer pseudoscalaire mesonen. Doch in dit geval zijn alleen de pseudoscalaire mesonen in tabel 2 van belang.

Naam deeltje	Symbol	Symbol antideeltje	Quark inhoud	Rustmassa (MeV/c ²)	Isospin	Lading (Q)	Strangeness (S)	Charm (C)	Bottomness (B)	I _z	Hypercharge (Y)
Kaon	K ⁺	K ⁻	u \bar{s}	0,493.677 ± 0.016	0,5	1	1	0	0	0,5	1
Kaon	K ⁰	K ⁰	d \bar{s}	0,497.614 ± 0.024	0,5	0	1	0	0	-0,5	1
Kaon	K ⁻	K ⁺	u \bar{s}	0,493.677 ± 0.016	0,5	-1	-1	0	0	0,5	-1
Kaon	K ⁰	K ⁰	d \bar{s}	0,497.614 ± 0.024	0,5	0	-1	0	0	-0,5	-1
Pion	π^+	π^-	u \bar{d}	0,139.570 18(35)	1	1	0	0	0	0	0
Pion	π^0	π^0	(u \bar{u} -d \bar{d})/ $\sqrt{2}$	0,134.976 6 ± 0.000 6	1	0	0	0	0	0	0
Pion	π^-	π^+	u \bar{d}	0,139.570 18(35)	1	-1	0	0	0	0	0
Eta meson	η	η	(u \bar{u} +d \bar{d} -2s \bar{s})/ $\sqrt{6}$	0,547.853 ± 0.024	0	0	0	0	0	0	0
Eta prime meson	η'	η'	(u \bar{u} +d \bar{d} +s \bar{s})/ $\sqrt{3}$	0,957.66 ± 0.24	0	0	0	0	0	0	0
D meson	D ⁺	D ⁻	c \bar{d}	1,869.62 ± 0.20	0,5	1	0	1	0	-0,5	1
D meson	D ⁰	D ⁰	c \bar{u}	1,864.84 ± 0.17	0,5	0	0	1	0	0,5	1
D meson	D ⁻	D ⁺	c \bar{d}	1,869.62 ± 0.20	0,5	-1	0	-1	0	-0,5	-1
D meson	D ⁰	D ⁰	c \bar{u}	1,864.84 ± 0.17	0,5	0	0	-1	0	0,5	-1
Pion	π^+	π^-	u \bar{d}	0,139.570 18(35)	1	1	0	0	0	0	0
Pion	π^0	π^0	(u \bar{u} -d \bar{d})/ $\sqrt{2}$	0,134.976 6 ± 0.000 6	1	0	0	0	0	0	0
Pion	π^-	π^+	u \bar{d}	0,139.570 18(35)	1	-1	0	0	0	0	0
Charmed eta meson	η_c	η_c	c \bar{c}	2,980.3 ± 1.2	0	0	0	0	0	0	0
Charmed Eta prime meson	η'_c	η'_c	(u \bar{u} +d \bar{d} +c \bar{c})/ $\sqrt{3}$	onbekend	0	0	0	0	0	0	0
B meson	B ⁺	B ⁻	u \bar{b}	5,279.15 ± 0.31	0,5	1	0	0	1	0,5	1
B meson	B ⁰	B ⁰	d \bar{b}	5,279.53 ± 0.33	0,5	0	0	0	1	-0,5	1
B meson	B ⁻	B ⁺	u \bar{b}	5,279.15 ± 0.31	0,5	-1	0	0	-1	0,5	-1
B meson	B ⁰	B ⁰	d \bar{b}	5,279.53 ± 0.33	0,5	0	0	0	-1	-0,5	-1
Pion	π^+	π^-	u \bar{d}	0,139.570 18(35)	1	1	0	0	0	0	0
Pion	π^0	π^0	(u \bar{u} -d \bar{d})/ $\sqrt{2}$	0,134.976 6 ± 0.000 6	1	0	0	0	0	0	0
Pion	π^-	π^+	u \bar{d}	0,139.570 18(35)	1	-1	0	0	0	0	0
Bottom eta meson	η_b	η_b	b \bar{b}	9,300 ± 40	0	0	0	0	0	0	0
Bottom Eta prime meson	η'_b	η'_b	(u \bar{u} +d \bar{d} +b \bar{b})/ $\sqrt{3}$	onbekend	0	0	0	0	0	0	0

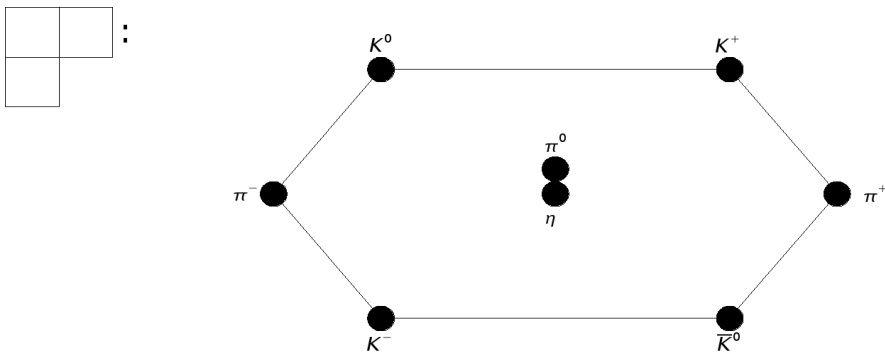
Tabel 2: Lijst van pseudoscalaire mesonen die gebruikt worden in smaaksymmetrie

Strangeness

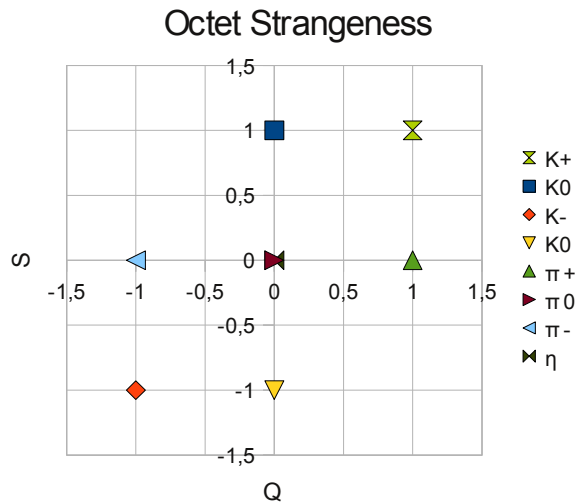
De octet van de smaaksymmetrie Strangeness geeft het volgende:



Waarbij geldt:



De vorm is afkomstig van de volgende grafiek:



De singlet levert:

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} : \frac{d\bar{d}+u\bar{u}+s\bar{s}}{\sqrt{3}}$$

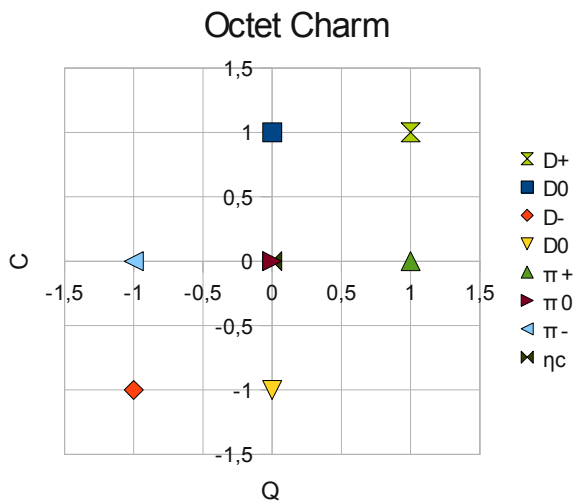
Waarbij geldt:

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} : \eta'$$

Charm

Dit verloopt hetzelfde als strangeness met als enige verschil dat alle s quarks door c quarks vervangen worden. Het volgende plaatje wordt hier gevonden:

(2,1):

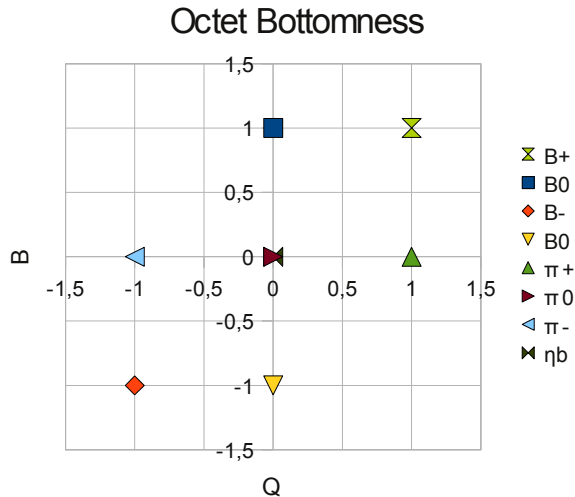


De singlet is hier het η'_c meson.

Bottomness

Hetzelfde verhaal als bij strangeness en Charm. Het volgende plaatje wordt hier gevonden:

(2,1):



De singlet is hier het η'_b meson.

Vector Mesonen

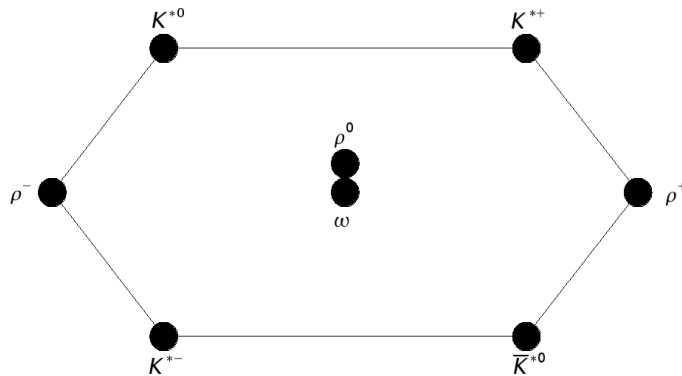
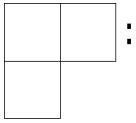
De lijst van gebruikte vector mesonen is weergegeven in tabel 3. Er zijn vanzelfsprekend meer vector mesonen. Doch in dit geval zijn alleen de vector mesonen in tabel 3 van belang.

Naam deeltje	Symbol	Symbol antideeltje	Quark inhoud	Rustmassa (MeV/c ²)	Isospin	Lading (Q)	Strangeness (S)	Charm (C)	Bottomness (B)	I _z	Hypercharge (Y)
Kaon	K ⁺	K ⁻	u \bar{s}	0,891.66 ± 0.026	0,5	1	1	0	0	0,5	1
Kaon	K ⁰	\bar{K}^0	d \bar{s}	0,896.00 ± 0.025	0,5	0	1	0	0	-0,5	1
Kaon	K ⁻	K ⁺	u \bar{s}	0,891.66 ± 0.026	0,5	-1	-1	0	0	0,5	-1
Kaon	\bar{K}^0	K ⁰	d \bar{s}	0,896.00 ± 0.025	0,5	0	-1	0	0	-0,5	-1
Charged rho meson	ρ^+	ρ^-	u \bar{d}	0,775.4 ± 0.4	1	1	0	0	0	0	0
Neutral rho meson	ρ^0	ρ^0	(u \bar{u} -d \bar{d})/ $\sqrt{2}$	0,775.49 ± 0.34	1	0	0	0	0	0	0
Charged rho meson	ρ^-	ρ^+	u \bar{d}	0,775.4 ± 0.4	1	-1	0	0	0	0	0
Omega meson	ω	ω	(u \bar{u} +d \bar{d} -2s \bar{s})/ $\sqrt{6}$	0,782.65 ± 0.12	0	0	0	0	0	0	0
Phi meson	ϕ	ϕ	(u \bar{u} +d \bar{d} +s \bar{s})/ $\sqrt{3}$	1,019.445 ± 0.020	0	0	0	0	0	0	0
D meson	D ⁺	D ⁻	c \bar{d}	2,010.27.62 ± 0.17	0,5	1	0	1	0	-0,5	1
D meson	D ⁰	\bar{D}^0	c \bar{u}	2,006.97 ± 0.19	0,5	0	0	1	0	0,5	1
D meson	D ⁻	D ⁺	c \bar{d}	2,010.27.62 ± 0.17	0,5	-1	0	-1	0	-0,5	-1
D meson	\bar{D}^0	D ⁰	c \bar{u}	2,006.97 ± 0.19	0,5	0	0	-1	0	0,5	-1
Charged rho meson	ρ^+	ρ^-	u \bar{d}	0,775.4 ± 0.4	1	1	0	0	0	0	0
Neutral rho meson	ρ^0	ρ^0	(u \bar{u} -d \bar{d})/ $\sqrt{2}$	0,775.49 ± 0.34	1	0	0	0	0	0	0
Charged rho meson	ρ^-	ρ^+	u \bar{d}	0,775.4 ± 0.4	1	-1	0	0	0	0	0
J/Psi	J/ ψ	J/ ψ	c \bar{c}	3,096.916 ± 0.011	0	0	0	0	0	0	0
B meson	B ⁺	B ⁻	u \bar{b}	5,325.1 ± 0.5	0,5	1	0	0	1	0,5	1
B meson	B ⁰	\bar{B}^0	d \bar{b}	5,325.1 ± 0.5	0,5	0	0	0	1	-0,5	1
B meson	B ⁻	B ⁺	u \bar{b}	5,325.1 ± 0.5	0,5	-1	0	0	-1	0,5	-1
B meson	\bar{B}^0	B ⁰	d \bar{b}	5,325.1 ± 0.5	0,5	0	0	0	-1	-0,5	-1
Charged rho meson	ρ^+	ρ^-	u \bar{d}	0,775.4 ± 0.4	1	1	0	0	0	0	0
Neutral rho meson	ρ^0	ρ^0	(u \bar{u} -d \bar{d})/ $\sqrt{2}$	0,775.49 ± 0.34	1	0	0	0	0	0	0
Charged rho meson	ρ^-	ρ^+	u \bar{d}	0,775.4 ± 0.4	1	-1	0	0	0	0	0
Upsilon meson	Υ	Υ	b \bar{b}	9,460.30 ± 0.26	0	0	0	0	0	0	0

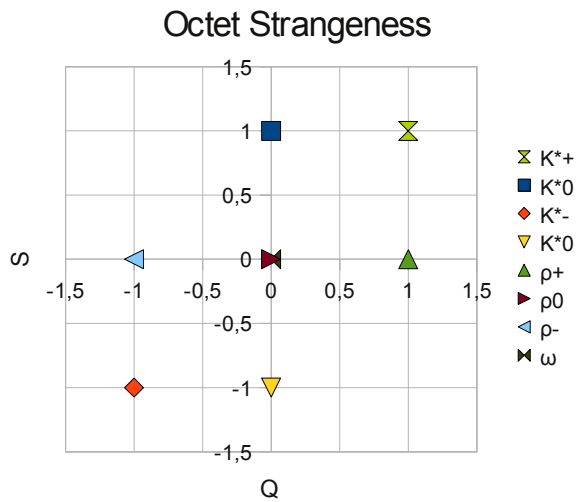
Tabel 3: Lijst van pseudoscalaire mesonen die gebruikt worden in smaaksymmetrie

Strangeness

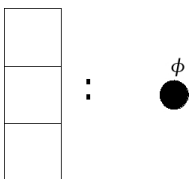
De opbouw van het octet van vector mesonen gaat hetzelfde als die van pseudoscalaire mesonen. Doch de toewijzing van de deeltjes is anders:



Hierbij is de vorm afkomstig van:

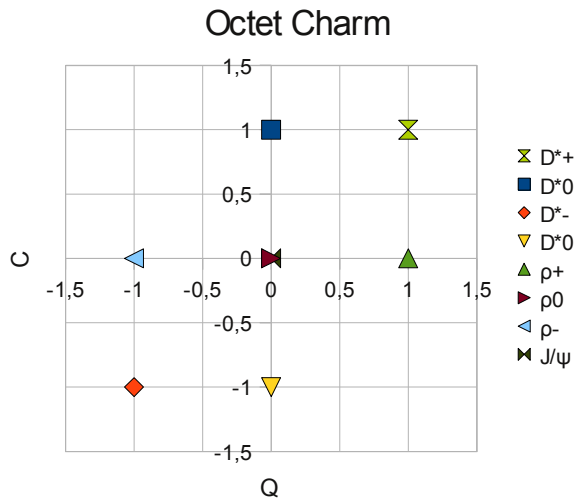


Hetzelfde geldt voor het singlet:



Charm

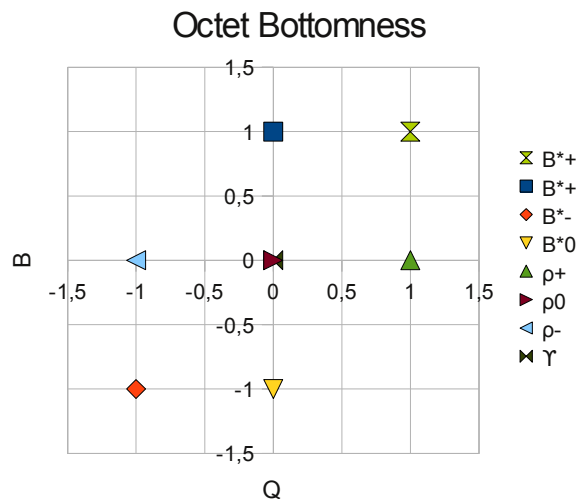
Dit verloopt hetzelfde als strangeness met als enige verschil dat alle s quarks door c quarks vervangen worden. Het volgende plaatje wordt hier gevonden:



Op dit moment is er geen singlet meson voor charm bekend.

Bottomness

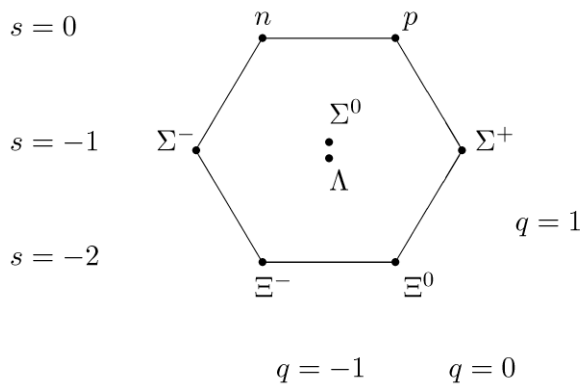
Hetzelfde verhaal als bij strangeness en Charm. Het volgende plaatje wordt hier gevonden:



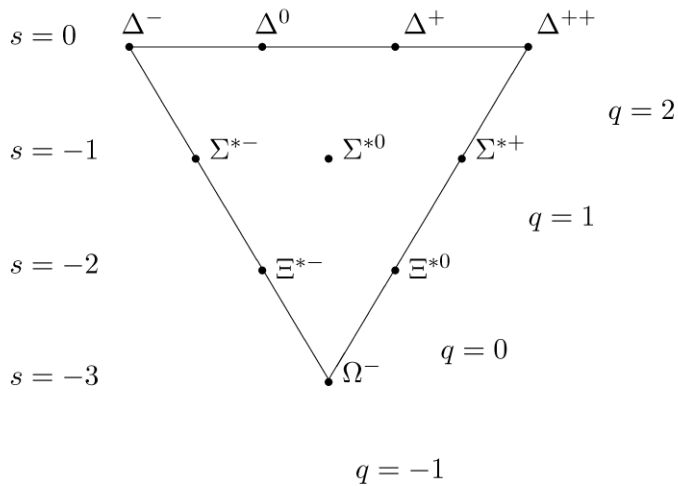
Ook hier is op het moment geen singlet meson van bekend.

Het achtvoudige pad

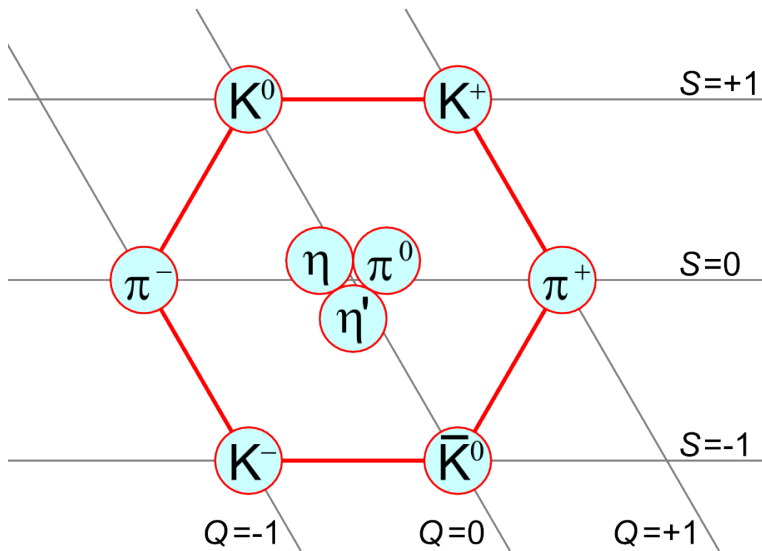
Het achtvoudige pad is een manier om baryonen en mesonen te organiseren. Deze organisatie gaat volgens de smaak symmetrie. De spin 3/2 baryonen worden in decuplets georganiseerd, spin 1/2 baryonen in een octets. Mesonen worden meestal per soort smaak georganiseerd. Deze organisatie is al grotendeels bij de bovenstaande smaak symmetrieën uitgewerkt. Het uiteindelijke resultaat krijgt met door bij de baryonen de twee grafieken te combineren en bij mesonen de octet en singlet toestanden te combineren. Voor een baryon octet wordt dat dan:



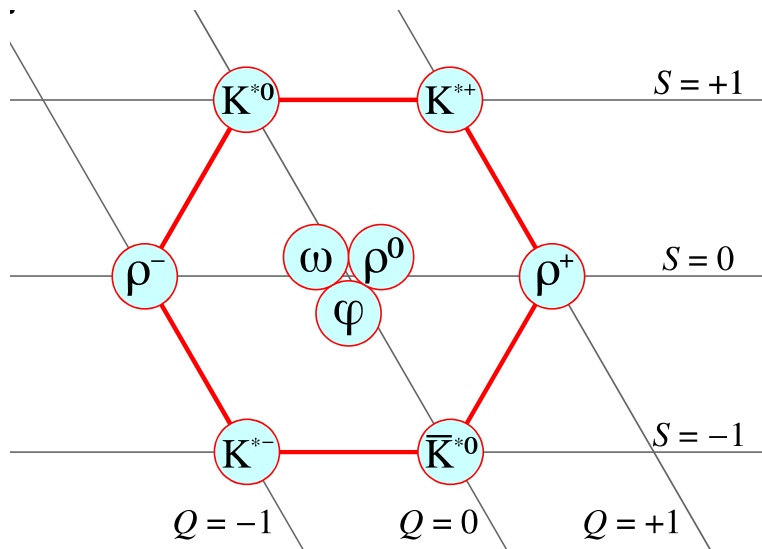
En voor een decuplet:



Voor een pseudoscalair meson wordt dat dan:



En voor een vector meson:



Het achtvoudige pad wordt in de deeltjesfysica gebruikt om eigenschappen van nog te observeren deeltjes te bepalen, alsmede om te bepalen welke deeltjes hoogstwaarschijnlijk nog gevonden dienen te worden.

Eisen aan een elementair deeltje

Elk elementair deeltje correspondeert met een kwantummechanische toestand. Deze toestand bestaat uit een aantal delen, elk deel hangt af van en is gecentreerd rond een irreducibel kwantumgetal. Young Tableaux geven een indicatie van symmetrie en anti-symmetrie van zo'n deel. Wil een deeltje bestaande uit quarks gevormd kunnen worden, dan moet een deel volledig anti-symmetrisch zijn. In het begin van de deeltjesfysica, toen men alleen nog maar weet had van EM en spin zag de kwantummechanische toestanden er als volgt uit:

$$\Psi = \psi_{EM} \psi_{Spin} = \psi_{U(1)} \psi_{SU(2)}$$

Voor de mesonen, deeltjes die maar uit twee quarks bestaan, werkte dit goed. De spin werd gebruikt om een volledig anti-symmetrisch deel te maken, zoals te zien is bij de volgende Young diagrammen:

$$\square \otimes \square = \square \oplus \square$$

$$2 \times \bar{2} = 3 + 1$$

Hier levert het laatste Young diagram het volledig anti-symmetrische deel. Binnen SU(2) worden anti-deeltjes op dezelfde manier gerepresenteerd met Young diagrammen als deeltjes. En hoewel dit mooi werkt voor mesonen, kwam men in de problemen zodra men meer dan 2 deeltjes ging beschouwen. En in het geval van baryonen liep men met de spin vast:

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \square) \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square = \square \oplus \square \oplus \square$$

$$2 \times 2 \times 2 = (3+1) \times 2 = 4 + 2 + 2$$

Dit leverde geen volledig anti-symmetrisch deel meer op en was daarom in dit geval nutteloos. Doch in die tijd had men niet veel deeltjes die uit drie quarks bestonden. De belangrijkste deeltjes bestaande uit drie quarks in die tijd waren het proton het neutron. Zowel het up quark als het down quark zijn onderhevig aan de Sterke Isospin, die door de groep SU(2) gerepresenteerd wordt. En een combinatie van Spin met Sterke Isospin (SU(2) x SU(2)) levert wel een volledig anti-symmetrisch deel op:

$$\square \otimes \square = \square \oplus \square$$

De bovenstaande vermenigvuldiging is dezelfde vermenigvuldiging als die van blz 7, waarbij hier regels 3.1 en 6 voor SU(2) zijn toegepast. De toestand wordt in dit geval:

$$\Psi = \psi_{EM} \psi_{Spin} \psi_{SterkeIsospin} = \psi_{U(1)} \psi_{SU(2)} \psi_{SU(2)}$$

En hoewel dit mooi werkte voor protonen en neutronen, was het volgende probleem het Δ^{++} deeltje. Want deze heeft een volledig symmetrisch deel bij sterke Isospin. En kan vanwege die reden niet succesvol met spin worden gecombineerd om een volledig anti-symmetrisch deel te maken. De uiteindelijke oplossing was dan ook om iets in te voeren dat wel een volledig anti-symmetrisch deel heeft voor drie deeltjes. Dit is uiteindelijk met behulp van de groep SU(3) gedaan. Later is men er pas achtergekomen dat dit correspondeert met de sterke wisselwerking. Dit deel heeft men kleur genoemd. En net zoals bij SU(2) bij de spin de ene toestand up en de andere

down heette, is bij SU(3) bij de kleur de toestanden: rood, groen en blauw genoemd, naar aanleiding van de drie basiskleuren. Het volledig anti-symmetrische deel van de kleur is een singlet toestand en is kleurneutraal. Doch voor alle SU(N) is een singlet volledig anti-symmetrisch, en andersom is een volledig anti-symmetrische toestand een singlet. Ten slotte is door de ontdekking van andere families quarks het algemene begrip smaak ingevoerd. Sterke Isospin is hierbinnen de smaak van het up en down quark. Daarnaast doen ook nog Strangeness, Charm en Bottomness mee. Die uiteindelijke toestand wordt dan:

$$\Psi = \psi_{EM} \psi_{Zwak} \psi_{Sterk} \Psi_{Smaak} = \psi_{U(1)} \psi_{SU(2)} \psi_{SU(3)} \psi_{SU(3)}$$

Voor deeltjes met meer dan 3 quarks zijn er afhankelijk van de samenstelling al dan niet een volledig anti-symmetrisch deel mogelijk. Als de spin wordt bekeken dan geldt voor 4 deeltjes, onafhankelijk of het deeltjes of anti-deeltjes zijn:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ &= \square\square\square\square \oplus \square\square \oplus \square \oplus \square\square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \end{aligned}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 5 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3$$

En voor 5 deeltjes, ook hier onafhankelijk van of het deeltjes of anti-deeltjes zijn:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \square\square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ &\oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ &= \square\square\square\square\square \oplus \square\square\square \oplus \square \oplus \square\square\square \oplus \square \oplus \square \\ &\oplus \square\square\square \oplus \square \oplus \square \oplus \square\square\square \end{aligned}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 6 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4$$

Uit het bovenstaande valt op te maken dat voor 4 deeltjes wel een anti-symmetrische toestand mogelijk is, en voor 5 deeltjes niet als alleen de spin bekeken wordt. Betrekken we ook nog kleur in dit alles dan krijgen we voor 4 deeltjes:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= \square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ &= \square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \square \end{aligned}$$

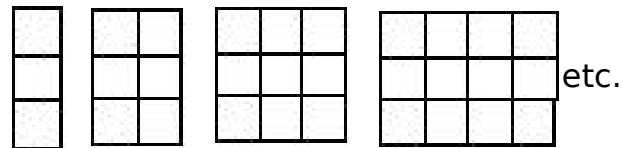
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 15 + 3 + 6 + 15 + 3 + 6 + 15 + 3 + 15$$

En ten slotte nog voor 4 deeltjes en een anti-deeltje:

$$\begin{aligned}
 \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square \otimes \square &= (\square \oplus \square) \otimes \square \otimes \square \otimes \square \\
 &= \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &= \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square \\
 &\oplus \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square
 \end{aligned}$$

$$\bar{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (8+1) \times 3 \times 3 \times 3 = 1+8+8+10+1+8+8+10+27+8+10+8+10+27+10+27+35+1+8+8+10$$

Bij deze twee gevallen zijn er dus wel volledig-antisymmetrische singlet delen mogelijk. Voor SU(3) is de volgende notitie belangrijk, deze Young diagrammen zijn allemaal equivalent aan elkaar:



Goed beschouwd volgt dit ook uit vermenigvuldigingsregel 6. Op deze manier houden we de smaak over. Deze wordt meestal vrijelijk gekozen, zonder te letten op de symmetrie dan wel anti-symmetrie. Dit valt ook te zien bij het achtvoudige pad, waarbij deeltjes zich in alle mogelijkheden bevinden. Een laatste notitie over kleurneutraliteit. Deze eigenschap moet altijd gelden, en impliceert een singlet / volledig anti-symmetrische toestand. Dit is al laten zien bij baryonen, doch voor mesonen wordt dit:

$$\square \otimes \bar{3} = \square \oplus \square$$

$$3 \times \bar{3} = 8 + 1$$

Wat netjes bewijst dat kleur een goed concept is dat consistent is bij alle deeltjes is.

Expansie Elementaire Deeltjes en Groepentheorie

Met al deze dingen kunnen wij nu met behulp van groepentheorie iets verder kijken wat betreft elementaire deeltjes. Er zijn hier 2 dingen die ik iets verder uit wil lichten.

Aanpassing kleursymmetrie.

Kleursymmetrie is eigenlijk gekozen omdat men wist dat de kwantummechanische toestand een volledig anti-symmetrische component moest hebben. Doch met de componenten die men in die tijd al had (zwakke isospin, EM en sterke isospin), kon er geen volledig anti-symmetrische toestand gemaakt worden voor alle deeltjes (Δ^{++} deeltje is zo'n tegenligger). De oplossing hiervoor was het introduceren van een 3de component: kleur. Deze component moest voldoen aan:

1. Hij moest geen invloed naar buiten hebben voor de in die tijd bekende deeltjes;
2. Hij moest een volledig anti-symmetrische component hebben die toegepast kon worden op de deeltjes;

Door het kiezen van 3 kleuren en te eisen dat een deeltje kleurneutraal is, heeft men toen dit probleem opgelost. Doch niets belet ons om meer dan 3 kleuren te kiezen. Voor de volledig anti-symmetrische component maakt het niets uit. Deze blijft voor de bekende deeltjes bestaan, onafhankelijk hoeveel kleuren je kiest, zolang die hoeveelheid maar groter of gelijk is aan 3. Ter illustratie vervang ik hier 3 kleuren door 4 kleuren, SU(3) wordt daardoor SU(4). Een probleem is echter dat bij het kiezen van meer dan 3 kleuren je de vereiste kleurneutraalheid verliest voor baryonen. Als we dit namelijk uitwerken met behulp van Young diagrammen dan krijgen we:

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \square) \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square$$

$$4 \times 4 \times 4 = (10 + 6) \times 4 = 20 + 20 + 20 + \bar{4}$$

Hoewel de laatste toestand volledig anti-symmetrisch is, is zij geen singlet toestand en ook niet kleurneutraal. Dit probleem is er bij mesonen niet:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{4} \times 4 = 15 + 1$$

Hier is dus duidelijk wel een volledig anti-symmetrische singlet toestand mogelijk. Doch als we terugkomen op de afwezigheid van kleurneutraalheid bij baryonen dan zou het mogelijk moeten zijn om de kleur van die deeltjes te meten. En experimenteel is dat namelijk nog nooit gemeten. Een andere mogelijkheid is een groep zo te kiezen dat zij uit meerdere componenten bestaat waarvan een combinatie van 3 tot een kleurloze toestand leidt. Doch

volgens groepentheorie zal $SU(3)$ altijd een ondergroep van deze groep zijn. En het enige wat er dan bereikt wordt is dat er een aantal combinaties van $SU(3)$ groepen mogelijk zijn, en het probleem blijft zo bestaan. Weer een ander probleem naast de kleurneutraliteit of het kiezen van een juiste groep is dat baryonen met 4 of meer quarks toegestaan worden. Dit zou inhouden dat er bijvoorbeeld een $uuuu$ baryon zou zijn, en de theoretische massa van dat baryon is klein genoeg dat als het zou bestaan het al lang gedetecteerd zou zijn geworden. Uiteindelijk is het zo dat in geen enkele meting ook maar op enige manier een hint gevonden is voor meer dan 3 kleuren. En volgens Ockhams scheermes is er dus geen enkele reden om aan te nemen dat er meer dan 3 kleuren zouden zijn.

Exotische Baryonen en Hadronen

Exotische baryonen zijn hypothetische deeltjes die gebonden toestanden zijn van 3 quarks en andere elementaire deeltjes. Exotische hadronen zijn deeltjes gemaakt van quarks die niet in het normale schema van het quark model passen. We bekijken hier baryonen en hadronen die uit meer deeltjes bestaan dan dat het quark model toestaat.

Exotisch Baryon

Een getheoretiseerd exotisch baryon is het pentaquark. Deze bestaat uit 4 quarks en een anti-quark: $qqqq\bar{q}$. Spinsymmetrisch ziet hij er zo uit:

$$\{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\} = \{5\} + \{3\} + \{2\}\{1\} + \{3\} + \{2\}\{1\} + \{2\}\{1\} + \{3\} + \{2\}\{1\} + \{2\}\{1\} + \{3\} \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 6 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4$$

En kleursymmetrisch:

$$\{1\}\{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\} = \{1\}\{1\}\{1\} + \{2\}\{1\} + \{2\}\{1\} + \{3\} + \{1\}\{1\}\{1\} + \{2\}\{1\} \\ + \{2\}\{1\} + \{3\}\{3\} + \{4\}\{2\} + \{2\}\{1\} + \{3\} + \{2\}\{1\} + \{3\}\{3\} + \{4\}\{2\} + \{3\} + \{4\}\{2\} + \{5\}\{1\} \\ + \{1\}\{1\}\{1\} + \{2\}\{1\} + \{2\}\{1\} + \{3\}$$

$$\bar{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (8 + 1) \times 3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10 + 1 + 8 + 8 + 10 + 27 + 8 + 10 + 8 + 10 + 27 \\ + 10 + 27 + 35 + 1 + 8 + 8 + 10$$

Het valt op dat er een volledig anti-symmetrische singlet component is voor de kleur. Zodoende voldoet dit deeltje in ieder geval aan kleurneutraliteit. Aan de anti-symmetrische component is in ieder geval voldaan. Alle andere componenten kunnen dus vrijelijk gekozen worden. Voor het gemak kunnen deze deeltjes beschouwd worden als opgebouwd zijnde uit twee deeltjes: een qqq deel en een $q\bar{q}$ deel. En hoewel kleur en spin voor het hele deeltje beschouwd moeten worden, kan smaak afzonderlijk voor elk van de beide delen apart worden beschouwd.

Een getheoretiseerd pentaquark is: $\Theta = uud\bar{d}\bar{s}$

Dit deeltje kan gezien worden als opgebouwd uit een proton en een eta prime meson. Hierbij levert het eta prime meson het anti-symmetrische deel van de toestand zodat het pentaquark kan bestaan. Of een pentaquark wel of niet bestaat is een controversieel onderwerp. Een aantal experimenten waaronder ZEUS, HERMES en SVD experiment claimen een pentaquark waargenomen te hebben. Doch CLAS, BaBar en Belle hebben niets waargenomen, waarbij het CLAS experiment speciaal bedoeld was om een pentaquark waar te nemen. Door dit verschil in waarnemingen blijft de controversie bestaan en blijft men experimenteren om dit fenomeen te bestuderen.

Exotisch Hadron

Een exotisch hadron zou onder andere kunnen bestaan uit een 4 quarks. Effectief gezien 2 mesonen die aan elkaar geplakt zijn, een zogenaamd tetraquark: $q\bar{q}q\bar{q}$

Ook deze combinatie is kleurneutraal en heeft een volledig anti-symmetrische singlet toestand. En net zoals bij een exotisch baryon kunnen we een tetraquark in 2 delen splitsen: 2 $q\bar{q}$ delen. Spin en kleur worden voor het hele deeltje beschouwd, doch smaak kan ook hier weer voor elk deel apart worden beschouwd. Hoewel volgens de QCD dit quark toegestaan is, is deze ook tot nu toe nog niet zonder enige twijfel gevonden.

Referenties

Groups, Representations and Physics, *H.F. Jones*, ISBN: 0852740301

Group theory and physics, *S. Sternberg*, ISBN: 0521558859

Modern Quantum Mechanics, *J.J. Sakurai*, ISBN: 0805375015

Introduction to Elementary Particles, *D.J. Griffiths*, ISBN: 9780471603863

Group Theory And Its Application To Physical Problems, *Morton Hamermesh*, ISBN: 0486661814

Particle listings, *Amsler et al.* (2008)

Group Theory in Physics Part II, Lie Groups & Lie Algebras, *Ben Bakker and Daniël Boer*