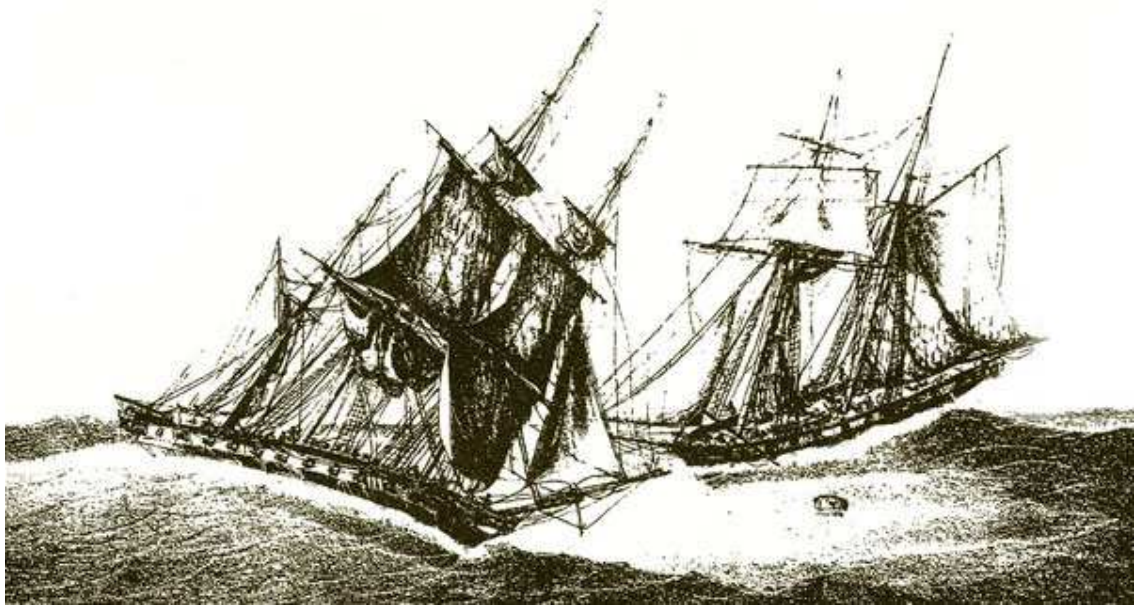


Het Casimir-effect en het fotino



Matthias Sars

Inhoudsopgave

Inleiding	2
1 Kwantisatie van het EM veld	3
1.1 De EM golfvergelijking	3
1.2 Klassieke oplossing	4
1.3 De Fock-ruimte	5
1.4 Kwantisatie van het EM veld	6
2 Het Casimir-effect in standaardconfiguratie	8
2.1 Stap 1: ΔE	8
2.2 Stap 2: Een Abel-Plana-achtige formule	10
2.3 Stap 3: Complexe integratie	12
2.4 Stap 4: De Casimir-kracht	16
3 Het Casimir-effect en het fotino	18
3.1 Supersymmetrie	18
3.2 Kwantisatie van het Majoranaveld	18
3.3 Het fotino-Casimir-effect	21
3.4 Kan het fotino-effect waargenomen worden?	23
Bibliografie	25

Inleiding

Deze scriptie is het resultaat van mijn bachelorproject voor de bacheloropleiding Natuur- & Sterrenkunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen, dat ik gedurende 2007 heb gedaan. Hierbij ben ik begeleid door Wim Beenakker van de afdeling Theoretische Hoge-energiefysica. Graag wil ik hem danken voor het idee achter deze scriptie en zijn kundige en prettige begeleiding.

Het Casimir-effect is kort gezegd de aantrekkende werking tussen twee geleidende platen ten gevolge van de nulpuntsenergie van het gekwantiseerde elektromagnetische veld (het fotonveld). In hoofdstuk 2 wordt hiervan een afleiding gegeven. Om dit te kunnen doen wordt eerst in hoofdstuk 1 het elektromagnetisch veld gekwantiseerd. Behalve een kleine aanpassing in de Abel-Plana-formule (een vergelijking waarmee het effect berekend kan worden) gebeurt er tot zover in deze scriptie weinig nieuws. Het Casimir-effect is namelijk eind 40-er jaren al voorspeld door de Nederlandse fysicus Hendrik Casimir. (Zie [3].)

In hoofdstuk 3 wordt een link gelegd tussen supersymmetrie en het Casimir-effect. Als we aannemen dat er behalve het massaloze bosonische fotonveld ook een massief fermionisch veld (het fotinoveld) is en dat de geleidende platen dezelfde randvoorwaarden aan het veld opleggen, blijkt er ook een repulsieve Casimir-kracht te zijn. Deze kracht neemt af met de fotinomassa.

De scriptie eindigt met een kleine haalbaarheidsstudie of experimenten mogelijk zijn om het fotino-Casimir-effect te meten. Dit blijkt (helaas) niet het geval te zijn.

Afbeelding op de voorkant: uit: P.C. Causseé, *l'Album du marin*, 1836. Vaak wordt het volgende effect als klassiek analogon van het Casimir-effect gezien: Twee naast elkaar liggende schepen kunnen onder sommige omstandigheden naar elkaar toe drijven, omdat ze, net als de geleidende platen, randvoorwaarden opleggen aan de golven in het water.

Hoofdstuk 1

Kwantisatie van het EM veld

“Vacuüm... daar zit wat in.”

— Introductie-T-shirt studievereniging Marie Curie, 2002

In dit hoofdstuk wordt het elektromagnetische veld gekwantiseerd. Het pretendeert echter niet een volledige afleiding te zijn. De inhoud is gebaseerd op § 1.2.1 en § 4.1–2 van [1] en § 2.1–3 van [2].

1.1 De EM golfvergelijking

We beginnen met de Maxwell-vergelijkingen. In afwezigheid van ladingen (en dus ook van ladingsstromen) luiden deze (in het SI):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Hierin is uiteraard \mathbf{E} het elektrisch veld en \mathbf{B} het magnetische.

Ze kunnen uitgedrukt worden in een scalaire potentiaal ϕ en een vectorpotentiaal \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},\tag{1.2}$$

want:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0, \\ -\nabla \times \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Er is een bepaalde ijkvrijheid in ϕ en \mathbf{A} . Laat ons voor de Coulomb-ijk kiezen. De condities hiervoor zijn:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \phi = 0.\tag{1.4}$$

\mathbf{E} en \mathbf{B} zijn dan te schrijven als:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.\tag{1.5}$$

De d'Alembertiaan $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ ¹ uitvoeren op A levert:

$$\begin{aligned}\square A &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times A) - \nabla (\nabla \cdot A) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Dit is de elektromagnetische golfvergelijking, die we willen oplossen.

1.2 Klassieke oplossing

Om dit te doen, nemen we periodieke randvoorwaarden voor A aan binnen een doos met ribben L_x , L_y en L_z . A kan dan als volgt in een Fourier-reeks geschreven worden:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L_x L_y L_z}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} (c_{\mathbf{k},\lambda} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + c_{\mathbf{k},\lambda}^* \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L_x L_y L_z}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} (c_{\mathbf{k},\lambda,0} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}} t) + c_{\mathbf{k},\lambda,0}^* \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}} t)) \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}})\end{aligned}\tag{1.7}$$

Hierin zijn

$$c_{\mathbf{k},\lambda} = c_{\mathbf{k},\lambda,0} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t)\tag{1.8}$$

coëfficiënten,² $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ en $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{e}_{\mathbf{k}})$ en $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{e}_{\mathbf{k}})$ polarisatievectoren zodanig dat $(\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}), \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}), \mathbf{e}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k})$ een orthonormale basis voor een rechtshandig assenstelsel is. De sommatie $\sum_{\mathbf{k}}$ loopt over alle mogelijke waarden van \mathbf{k} . Vanwege de periodieke randvoorwaarden moet \mathbf{k} aan de volgende conditie voldoen (voor $j \in \{x, y, z\}$):

$$k_j = \frac{2\pi}{L_j} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}.\tag{1.9}$$

De sommatie \sum_{λ} loopt over de twee heliceitswaarden $\lambda = \pm 1$.³

De energie binnen de doos wordt gegeven door

$$\begin{aligned}H_{\text{EM}} &= \frac{1}{2} \int_{\text{doos}} d^3\mathbf{r} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{doos}} d^3\mathbf{r} \left(\varepsilon_0 \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right) \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \omega_{\mathbf{k}}^2 |c_{\mathbf{k},\lambda}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \left(P_{\mathbf{k},\lambda}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k},\lambda}^2 \right)\end{aligned}\tag{1.10}$$

¹Merk op dat de d'Alembertiaan eigenlijk de Laplaciaan is in de Minkowski-ruimte. Hij wordt ook wel geschreven worden $\partial_{\mu} \partial^{\mu}$.

²In (1.7) zijn de coëfficiënten $c_{\mathbf{k},\lambda}$ en $c_{\mathbf{k},\lambda}^*$ elkaars complex geconjugeerden, omdat A reëel moet zijn.

³De heliceit $\lambda = 0$ bestaat niet voor fotonen, omdat ze in elk inertiaalstelsel met de lichtsnelheid reizen, omdat ze massaloos zijn.

In de derde stap zijn allerlei orthonormaliteitsrelaties gebruikt. In de vierde zijn de volgende grootheden ingevoerd:

$$Q_{k,\lambda} = c_{k,\lambda} + c_{k,\lambda}^*, \quad P_{k,\lambda} = i\omega_k (-c_{k,\lambda} + c_{k,\lambda}^*) = \dot{Q}_{k,\lambda}. \quad (1.11)$$

Deze voldoen aan:

$$\frac{\partial H_{EM}}{\partial P_{k,\lambda}} = P_{k,\lambda} = \dot{Q}_{k,\lambda}, \quad \frac{\partial H_{EM}}{\partial Q_{k,\lambda}} = \omega_k^2 Q_{k,\lambda} = -\ddot{Q}_{k,\lambda} = -\dot{P}_{k,\lambda}. \quad (1.12)$$

Dit zijn Hamilton-vergelijkingen. $Q_{k,\lambda}$ en $P_{k,\lambda}$ zijn dus respectievelijk een soort plaats en impuls, m.a.w.: ze zijn kanoniek geconjugeerde variabelen. In vergelijking (1.10) herkennen we zo de Hamiltoniaan van een (aftelbaar oneindige) collectie harmonische oscillatoren.

1.3 De Fock-ruimte

Om straks de elektromagnetische Hamiltoniaan te kunnen kwantiseren, is eerst wat gereedschap nodig: creatie-, annihilatie- en teloperatoren, die operatoren zijn in de Fock-ruimte.

De Fock-ruimte is een Hilbert-ruimte die bestaat uit veeldeeltjestoestanden. Laten we de ééndeltjestoestanden nummeren met $1, 2, \dots$. Een veeldeeltjestoestand representeren we nu met een ket $|N_1, N_2, \dots\rangle$, waarin N_j het aantal deeltjes in toestand j is. (Dit is de bezettingsgealrepresentatie.)

De basis van de Fockruimte kan worden geschreven als:

$$\{|N_1, N_2, \dots\rangle \mid N_1, N_2, \dots \in \mathbb{N}\}. \quad (1.13)$$

Deze is orthonormaal:

$$\langle N_1, N_2, \dots \mid N'_1, N'_2, \dots \rangle = \prod_j \delta_{N_j N'_j}. \quad (1.14)$$

(Hierin is δ de Kronecker- δ .)

De creatieoperator \hat{a}_j^\dagger en annihilatieoperator \hat{a}_j werken als volgt op basistoestanden:⁴

$$\begin{aligned} \hat{a}_j^\dagger |\dots, N_j, \dots\rangle &= \sqrt{N_j + 1} |\dots, N_j + 1, \dots\rangle, \\ \hat{a}_j |\dots, N_j, \dots\rangle &= \sqrt{N_j} |\dots, N_j - 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Merk op dat voor de vacuümtoestand

$$\hat{a}_j |0, 0, \dots\rangle = 0, \quad (1.16)$$

m.a.w.: het is niet mogelijk om in het vacuüm een deeltje te annihilieren, wat je natuurlijk ook zou verwachten. Creatie- en annihilatieoperatoren zijn niet Hermitisch en dus ook geen observabelen.

De Hermitische en dus observabele teloperator

$$\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \quad (1.17)$$

werkt als volgt op basistoestanden:

$$\begin{aligned} \hat{N}_j |\dots, N_j, \dots\rangle &= \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j |\dots, N_j, \dots\rangle \\ &= \sqrt{N_j} \hat{a}_j^\dagger |\dots, N_j - 1, \dots\rangle \\ &= N_j |\dots, N_j, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (1.18)$$

⁴In onze representatie worden de fasefactoren gelijk aan 1 genomen.

De basistoestanden zijn dus eigenvectoren van \hat{N}_j met eigenwaarde N_j .

Een basistoestand kan nu als volgt in de vacuümtoestand uitgedrukt worden:

$$|N_1, N_2, \dots\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{N_1}}{\sqrt{N_1!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{N_2}}{\sqrt{N_2!}} \dots |0, 0, \dots\rangle. \quad (1.19)$$

De creatie- en annihilatieoperatoren voldoen ofwel aan commutatierelaties:

$$[\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_{j'}^\dagger] = [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}] = 0, \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}, \quad (1.20)$$

dan zijn de bijbehorende deeltjes bosonen, ofwel aan anticommutatierelaties:⁵

$$\{\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_{j'}^\dagger\} = \{\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}\} = 0, \quad \{\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger\} = \delta_{jj'}, \quad (1.21)$$

dan zijn de bijbehorende deeltjes fermionen. In dat geval is $(\hat{a}_j^\dagger)^2 = \frac{1}{2} \{\hat{a}_j, \hat{a}_j\} = 0$, dus kan er niet meer dan één deeltje in elke toestand zitten. Dit is het Pauli-uitsluitingsprincipe.

1.4 Kwantisatie van het EM veld

Het kwantiseren houdt nu in dat $Q_{k,\lambda}$ en $P_{k,\lambda}$ niet meer als reële getallen moeten worden beschouwd, maar als Hermitische operatoren in de toestandruimte, respectievelijk $\hat{Q}_{k,\lambda}$ en $\hat{P}_{k,\lambda}$.

Definieer nu:

$$\hat{a}_{k,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{Q}_{k,\lambda} + i\hat{P}_{k,\lambda}), \quad \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{Q}_{k,\lambda} - i\hat{P}_{k,\lambda}), \quad (1.22)$$

zodat:

$$\omega_k \hat{Q}_{k,\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (\hat{a}_{k,\lambda} + \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger), \quad \hat{P}_{k,\lambda} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (\hat{a}_{k,\lambda} - \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger). \quad (1.23)$$

De coëfficiënten $c_{k,\lambda}$ zijn dus vervangen door $\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \hat{a}_{k,\lambda}$.

De Hamilton-operator kan nu verkregen worden uit de klassieke Hamiltoniaan, vergelijking (1.10):

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{EM}} &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_\lambda (\hat{P}_{k,\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{k,\lambda}^2) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \sum_k \sum_\lambda \omega_k (\hat{a}_{k,\lambda} \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger \hat{a}_{k,\lambda}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Omdat $Q_{k,\lambda}$ en $P_{k,\lambda}$ kanoniek geconjugeerde variabelen zijn, laten we $\hat{Q}_{k,\lambda}$ en $\hat{P}_{k,\lambda}$ aan de volgende (kanonieke) commutatierelaties voldoen:

$$[\hat{Q}_{k,\lambda}, \hat{P}_{k',\lambda'}] = i\hbar \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [\hat{Q}_{k,\lambda}, \hat{Q}_{k',\lambda'}] = 0, \quad [\hat{P}_{k,\lambda}, \hat{P}_{k',\lambda'}] = 0. \quad (1.25)$$

Dan geldt voor $\hat{a}_{k,\lambda}$ en $\hat{a}_{k',\lambda'}^\dagger$:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{k,\lambda}, \hat{a}_{k',\lambda'}^\dagger] &= \frac{i}{2\hbar} \left(-[\hat{Q}_{k,\lambda}, \hat{P}_{k',\lambda'}] + [\hat{P}_{k,\lambda}, \hat{Q}_{k',\lambda'}] \right) = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \\ [\hat{a}_{k,\lambda}, \hat{a}_{k',\lambda'}] &= 0, \\ [\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k',\lambda'}^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

⁵Zij \hat{A} en \hat{B} operatoren. In analogie met de commutator $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ wordt de anticommutator gedefinieerd als: $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

Dit zijn de bosonische commutatierelaties van (1.20). De elektromagnetische kwanta, de fotonen, zijn dus bosonen.

Als we, net als in (1.17), de teloperator

$$\hat{N}_{k,\lambda} = \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger \hat{a}_{k,\lambda} \quad (1.27)$$

definieren, kan de Hamiltoniaan met de commutatierelaties omgeschreven worden tot:

$$\hat{H}_{\text{EM}} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{N}_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.28)$$

Afgezien van de sommaties is dit de uitdrukking die we voor de kwantummechanische harmonische oscillator kennen.

Stel dat ons systeem zich in de vacuümtoestand ($|0, 0, \dots\rangle$) bevindt. De energie-eigenwaarde is dan:

$$\begin{aligned} E_{\text{EM},0} &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \omega_{\mathbf{k}} \\ &= \hbar \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \\ &= \hbar c \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\ &= \hbar c \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{2\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_z}{L_z}\right)^2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Er is dus een nulpuntsenergie aanwezig, die zelfs divergeert! Dit is de veroorzaker van het Casimir-effect.

We bevinden ons nog steeds in de situatie van een doos met periodieke randvoorwaarden. Om deze op te heffen, kunnen de periodiciteitslengtes L_j ($j \in \{x, y, z\}$) oneindig groot worden gemaakt (continuümlimiet). Omdat de mogelijke golfgetallen $k_j = \frac{2\pi}{L_j} n_j$ in de limiet $L_j \rightarrow \infty$ oneindig dicht komen te liggen, gaat de n_j -som dan als volgt in een integraal over:

$$\sum_{n_j=-\infty}^{\infty} \rightarrow \frac{L_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_j. \quad (1.30)$$

Hoofdstuk 2

Het Casimir-effect in standaardconfiguratie

In dit hoofdstuk wordt het Casimir-effect voor de standaardconfiguratie (twee oneindig grote perfect geleidende parallelle platen) afgeleid. Er zijn meerdere methodes om dit te doen: Casimir zelf heeft het met de Euler-Maclaurin-formule gedaan (zie [3]), maar het kan ook via de Abel-Plana-formule of ζ -functie-regulatie (zie § 2.2 van [4]). De hier volgende afleiding zal gebruik maken van een iets gewijzigde en algemenere versie van de Abel-Plana-formule.

Overigens geeft [4] een goed overzicht van de ontwikkelingen rond het Casimir-effect sinds 1948. [5] geeft een erg aardige inleiding.

2.1 Stap 1: ΔE

Beschouw twee parallelle perfect geleidende platen in vacuüm, zeg parallel aan het (x, y) -vlak. De afstand tussen de platen noemen we a en de oppervlakte S . (Zie figuur 2.1.) We nemen aan dat $a \ll \sqrt{S}$, dus dat we de platen als oneindig groot mogen beschouwen.

De platen leggen randvoorwaarden op aan de z -afhankelijkheid van E en B en dus aan A :

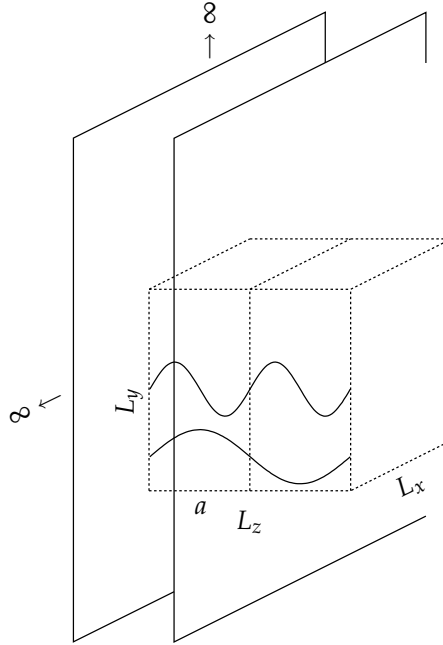
$$A_{x,y}|_{z=0} = A_{x,y}|_{z=a} = 0. \quad (2.1)$$

Dit kun je interpreteren als periodieke randvoorwaarden met periodiciteitslengte $2a$. De energie van het elektromagnetisch veld kan dan worden verkregen door op vergelijking (1.29) de continuümlimiet (1.30) toe te passen voor $j = x$ en $j = y$ en $L_x L_y = S$ en $L_z = 2a$ te nemen:

$$\begin{aligned} E_{\text{met platen}} &= \frac{\hbar c L_x L_y}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{2\pi n}{L_z}\right)^2} \\ &= \frac{\hbar c S}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Er is ook nog een factor $\frac{1}{2}$ bij gekomen, omdat er niet over de doos met volume $L_x \times L_y \times L_z$ is geïntegreerd (vergelijking (1.10)), maar $L_x \times L_y \times a = L_x \times L_y \times \frac{1}{2}L_z$, een half zo groot volume dus. Dit mag omdat de energie per volume-eenheid constant is.

In afwezigheid van de platen is er ook geen sprake van periodiciteit in de z -richting, dus is



Figuur 2.1: De twee oneindige platen met het doosje dat de periodieke randvoorwaarden vastlegt.

de energie in dat geval (pas ook nog (1.30) toe voor $j = z$):

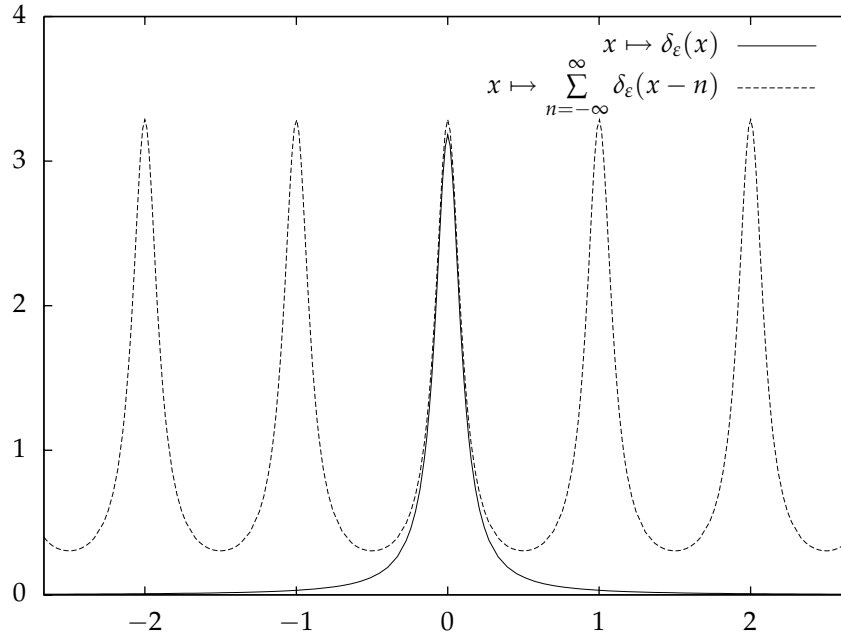
$$\begin{aligned}
 E_{\text{zonder platen}} &= \frac{\hbar c L_x L_y L_z}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\
 &= \frac{\hbar c L_x L_y}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{2\pi t}{L_z}\right)^2} \\
 &= \frac{\hbar c S}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi t}{a}\right)^2}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

In de tweede stap is $k_z = \frac{2\pi t}{L_z}$ gesubstitueerd.

Het verschil van voornoemde twee nulpuntsenergieën is:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_{\text{met platen}} - E_{\text{zonder platen}} \\
 &= \frac{\hbar c S}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi t}{a}\right)^2} \right) \\
 &= \frac{\hbar c S}{4\pi} \int_0^{\infty} dk_s k_s \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_s^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{k_s^2 + \left(\frac{\pi t}{a}\right)^2} \right) \\
 &= \frac{\pi^2 \hbar c S}{4a^3} \int_0^{\infty} dy y \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{y^2 + n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{y^2 + t^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

In de derde stap is overgegaan op poolcoördinaten in het (k_x, k_y) -vlak ($k_x^2 + k_y^2 = k_s^2$). In de vierde stap is $k_s = \frac{\pi y}{a}$ gesubstitueerd. Deze ΔE zal het Casimir-effect veroorzaken.



Figuur 2.2: $\delta_\varepsilon(x)$ (vergelijking (2.5)) en $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-n)$ als functie van x voor $\varepsilon = 0.1$

Merk op dat bovenstaande sommaties en integralen divergeren. Dit zou opgelost kunnen worden door een regulatorfunctie¹ te gebruiken, maar omdat zo'n functie in feite niets doet, wordt deze weggelaten. Uiteindelijk zal blijken dat ΔE eindig is.

Merk verder op dat de integraal over y een dimensieloze constante is, m.a.w.: een getal. We kunnen nu dus al zien dat $\Delta E \propto a^{-3}$, dus dat de Casimir-kracht $F = -\frac{d\Delta E}{da} \propto a^{-4}$. Wat nog moet gebeuren is het uitrekenen van de integraal om de grootte en het teken van F te bepalen. Dit is waar de rest van dit hoofdstuk over gaat.

2.2 Stap 2: Een Abel-Plana-achtige formule

De Dirac- δ -functie kan worden gezien als het limietgeval van

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\tau x - \varepsilon|\tau|) \quad (2.5)$$

voor $\varepsilon \downarrow 0$.

Beschouw nu de functie $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-n)$ voor $\varepsilon > 0$. (In de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ wordt deze de Dirac-kam of III-functie² met periode 1 genoemd.) Deze gaan we als Fourier-reeks schrijven.

¹Zie [4], pag. 14.

²III is de Cyrillische letter 'Sha'.

De Fourier-coëfficiënten³ hiervan zijn:

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-n) \exp(-2\pi imx) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} dx \delta_\varepsilon(x-n) \exp(-2\pi imx) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2-n}^{1/2-n} dx \delta_\varepsilon(x) \exp(-2\pi im(x+n)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2-n}^{1/2-n} dx \delta_\varepsilon(x) \exp(-2\pi imx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\varepsilon(x) \exp(-2\pi imx) \tag{2.6} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\tau x - \varepsilon|\tau|) \exp(-2\pi imx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-\varepsilon|\tau|) \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i(\tau - 2\pi m)x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-\varepsilon|\tau|) \delta(\tau - 2\pi m) \\
&= \exp(-2\pi\varepsilon|m|).
\end{aligned}$$

In de tweede stap is de integratievariabele x verschoven naar $x+n$, in de derde is gebruikt dat $\exp(-2\pi imn) = 1$, omdat $mn \in \mathbb{Z}$, in de vierde is de additiviteit van integralen gebruikt en in de zevende is vergelijking (2.5) met $\varepsilon \downarrow 0$ gebruikt. (Merk op dat alle Fourier-coëfficiënten voor $\varepsilon \downarrow 0$ naar 1 gaan.)

De Dirac-kam is dus als volgt als Fourier-reeks te schrijven:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi imx - 2\pi\varepsilon|m|) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-2\pi(ix + \varepsilon)m) + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(2\pi(ix - \varepsilon)m) + 1 \\
&= \frac{\exp(-2\pi(ix + \varepsilon))}{1 - \exp(-2\pi(ix + \varepsilon))} + \frac{\exp(2\pi(ix - \varepsilon))}{1 - \exp(2\pi(ix - \varepsilon))} + 1 \\
&= \frac{1}{\exp(2\pi(ix + \varepsilon)) - 1} + \frac{1}{\exp(2\pi(-ix + \varepsilon)) - 1} + 1.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Hierin is in de derde stap de geometrische reeks gebruikt. Dit kan omdat $|\exp(-2\pi(\varepsilon \pm ix))| = \exp(-2\pi\varepsilon) < 1$.

³De volgende formulering van Fourier-reeksen wordt hier gebruikt: Een periodieke functie f met periode 1 is te schrijven als

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp(2\pi imx),$$

waarin de Fourier-coëfficiënten A_m als volgt te berekenen zijn:

$$A_m = \int_{-1/2}^{1/2} dx f(x) \exp(-2\pi imx).$$

Zij F een of andere functie. Het linker lid met $F(x)$ vermenigvuldigen, integreren en de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ nemen levert

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x-n) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \delta_{\varepsilon}(x-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \delta(x-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hetzelfde met het rechter lid doen levert:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \left(\frac{1}{\exp(2\pi(ix+\varepsilon)) - 1} + \frac{1}{\exp(-2\pi(ix-\varepsilon)) - 1} + 1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx F(x)}{\exp(2\pi(ix+\varepsilon)) - 1} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx F(x)}{\exp(-2\pi(ix-\varepsilon)) - 1} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \\ &= i \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(- \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt F(-it)}{\exp(2\pi(t+\varepsilon)) - 1} + \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{dt F(it)}{\exp(2\pi(t+\varepsilon)) - 1} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) \\ &= -i \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{F(it) + F(-it)}{\exp(2\pi(t+\varepsilon)) - 1} + \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

In de derde stap is in de eerste integraal $x = -it$ gesubstitueerd en in de tweede integraal $x = it$. We krijgen zo:⁴

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) - \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) = -i \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{F(it) + F(-it)}{\exp(2\pi(t+\varepsilon)) - 1}. \quad (2.10)$$

Neem hierin $F(t) = \sqrt{y^2 + t^2}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{y^2 + n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{y^2 + x^2} = -2i \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t+\varepsilon)) - 1}. \quad (2.11)$$

2.3 Stap 3: Complexe integratie

Beschouw de integraal over de contour zoals aangegeven in figuur 2.3 over de functie gegeven door $t \mapsto \frac{\sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t+\varepsilon)) - 1}$. Deze heeft branch cuts⁵ op de intervallen $(-\infty, -y)$ en (y, ∞) en een

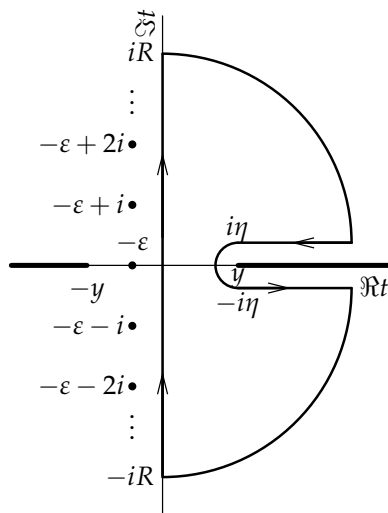
⁴Deze vergelijking lijkt erg op de Abel-Plana-formule (vergelijking (2.25) van [4]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} dx F(x) = \frac{1}{2}F(0) + i \int_0^{\infty} dt \frac{F(it) + F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1}.$$

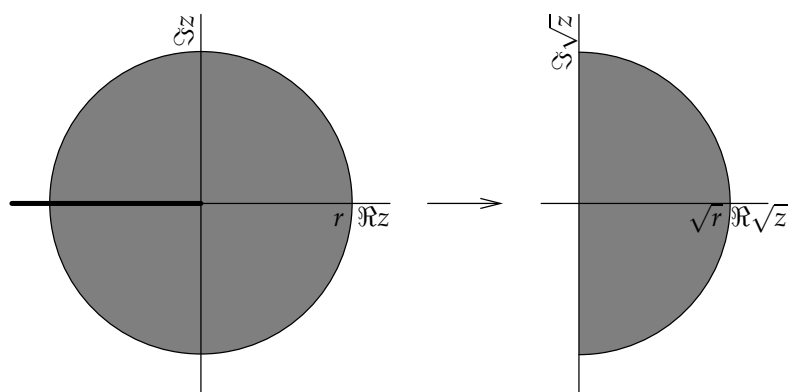
(Hierin moet F analytisch in het rechter half-vlak zijn.)

De truc om deze af te leiden met de Fourier-reeks van de Dirac-kam is overigens ontleend aan [12], pag. 175, noot \ddagger .

⁵De complexe wortelfunctie (gegeven door $z \mapsto \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp\left(\frac{1}{2}i \arg(z)\right)$) scheurt een cirkelschijf rond 0 als het ware open. Als we het argument definiëren tussen $-\pi$ en π gebeurt dit openscheuren bij de negatieve helft van de reële as (zie figuur 2.4). Gevolg hiervan is dat een getal vlak boven of onder deze zogenaamde branch cut op een geheel andere plaats in het complexe vlak wordt afgebeeld.



Figuur 2.3: De contour in het complexe t -vlak (vergelijking (2.15))



Figuur 2.4: De wortelfunctie toegepast op een schijf met middelpunt 0 en straal r in het complexe vlak

collectie enkelvoudige polen in $-\varepsilon + i\ell$ (voor $\ell \in \mathbb{Z}$),⁶ maar is verder analytisch. Omdat er geen singulariteiten zijn die zich binnen de contour bevinden, is

$$\oint_{\text{contour}} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} = 0. \quad (2.12)$$

Voor de integraal over de kwartcirkelboog in het eerste kwadrant geldt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{kwartcirkelboog}} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} \right| &= \left| R \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi \exp(i\phi) \sqrt{y^2 - R^2 \exp(2i\phi)}}{\exp(2\pi(\varepsilon + R \exp(i\phi))) - 1} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \pi \max_{\phi \in (0, \pi/2)} \left| \frac{R \sqrt{y^2 - R^2 \exp(2i\phi)}}{\exp(2\pi(\varepsilon + R \exp(i\phi))) - 1} \right|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dit gaat voor $R \rightarrow \infty$ naar 0, omdat de teller als R^2 gaat, terwijl de noemer veel harder als $\exp(R)$ gaat. Op analoge manier kan aangetoond worden dat de integraal over de andere kwartcirkelboog ook naar 0 gaat. De integraal over het halve cirkeltje met straal η gaat uiteraard ook naar 0, omdat y geen singulier punt is. De integralen over de rechte stukken blijven dus over. De limieten $\eta \downarrow 0$ en $R \rightarrow \infty$ toepassen op de contourintegraal levert:

$$\begin{aligned} &\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} \\ &+ \lim_{\eta \downarrow 0} \left(\int_{\infty+i\eta}^{y+i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} + \int_{y-i\eta}^{\infty-i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Herschikken en de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ nemen levert:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\eta \downarrow 0} \left(\int_{y+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} - \int_{y-i\eta}^{\infty-i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} \right) \\ &= \lim_{\eta \downarrow 0} \int_{y+i\eta}^{\infty+i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi t) - 1} - \lim_{\eta \downarrow 0} \int_{y-i\eta}^{\infty-i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi t) - 1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

In de tweede stap kan voor de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ zonder meer $\varepsilon = 0$ ingevuld worden, omdat t in de integralen niet in de buurt van de imaginaire as komt.

De twee integralen van het laatste lid uitwerken levert (lees steeds het bovenste teken voor

⁶Dit is de reden waarom in vergelijking (2.5) de Dirac- δ -functie ingevoerd is als limiet. Als dat niet gedaan was, lagen de polen op de imaginaire as en zou je over de polen heen integreren. Normaal gesproken zou je dan de integraal als oneigenlijke integraal behandelen, maar dat mag alleen als de integraal continu is als functie van de grenzen. Als je de δ -functie toelaat als functie, is dit niet meer altijd het geval.

de eerste integraal en het onderste voor de tweede):

$$\begin{aligned}
& \lim_{\eta \downarrow 0} \int_{y \pm i\eta}^{\infty \pm i\eta} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi t) - 1} \\
&= \lim_{\eta \downarrow 0} \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2 + \eta^2 \mp 2i\eta t}}{\exp(2\pi(t \pm i\eta)) - 1} \\
&= \lim_{\eta \downarrow 0} \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{\sqrt{(y^2 - t^2 + \eta^2)^2 + 4\eta^2 t^2} \exp\left(i \left(\arctan\left(\mp \frac{2\eta t}{y^2 - t^2 + \eta^2}\right) \mp \theta(-y^2 + t^2 - \eta^2) \pi\right)\right)}{\exp(2\pi(t \pm i\eta)) - 1} \\
&= \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{|y^2 - t^2|} \exp(\mp i\theta(-y^2 + t^2) \pi)}{\exp(2\pi t) - 1} \\
&= \exp\left(\mp \frac{1}{2} i\pi\right) \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{t^2 - y^2}}{\exp(2\pi t) - 1} \\
&= \mp i \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{t^2 - y^2}}{\exp(2\pi t) - 1}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

In de eerste stap is t verschoven naar $t \pm i\eta$. In de tweede is het stuk onder de wortel omgeschreven in poolcoördinaten in het complexe vlak. Hierbij is gebruikt dat als we (zoals afgesproken hebben in voetnoot 5) het argument tussen $-\pi$ en π nemen, het als volgt te berekenen is:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right) + \theta(-\Re z) \operatorname{sgn}(\Im z) \pi. \tag{2.17}$$

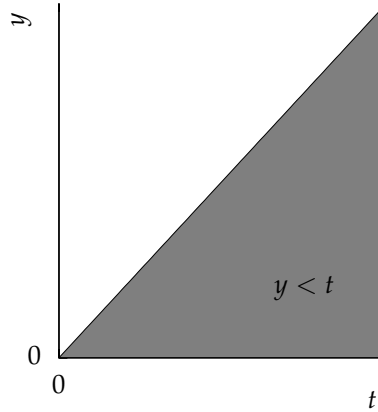
Hierin is θ de Heaviside-stapfunctie. In de vierde stap wordt gebruikt dat in de integraal $u > y > 0$.

Vergelijking (2.15) wordt dus:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt \sqrt{y^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \varepsilon)) - 1} = -2i \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{t^2 - y^2}}{\exp(2\pi t) - 1} \tag{2.18}$$

en dus wordt (2.11)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{y^2 + n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{y^2 + x^2} = -4 \int_y^{\infty} \frac{dt \sqrt{t^2 - y^2}}{\exp(2\pi t) - 1}. \tag{2.19}$$



Figuur 2.5: Het integratiegebied in het (t, y) -vlak, eerste twee regels van vergelijking (2.20)

2.4 Stap 4: De Casimir-kracht

Met y vermenigvuldigen en over y integreren levert:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \int_0^\infty dy y \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{y^2 + n^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{y^2 + t^2} \right) &= - \int_0^\infty dy y \int_y^\infty \frac{dt \sqrt{t^2 - y^2}}{\exp(2\pi t) - 1} \\
 &= - \int_0^\infty \frac{dt}{\exp(2\pi t) - 1} \int_0^t dy y \sqrt{t^2 - y^2} \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{dt}{\exp(2\pi t) - 1} (t^2 - y^2)^{3/2} \Big|_{y=0}^t \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{dt t^3}{\exp(2\pi t) - 1} \\
 &= -\frac{1}{48\pi^4} \int_0^\infty \frac{du u^3}{\exp(u) - 1} \\
 &= -\frac{\Gamma(4)\zeta(4)}{48\pi^4} \\
 &= -\frac{1}{720}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

In de tweede stap is van integratievolgorde gewisseld (zie figuur 2.5). In de vijfde is $t = \frac{u}{2\pi}$ gesubstitueerd. In de zesde is gebruikt dat (voor $\Re\mu > 1$):

$$\int_0^\infty \frac{du u^{\mu-1}}{\exp(u) - 1} = \Gamma(\mu)\zeta(\mu), \tag{2.21}$$

waarin Γ de Γ -functie is en ζ de Riemann- ζ -functie.⁷ In de zevende stap zijn $\Gamma(4) = 3! = 6$ en $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ ingevuld.

⁷Volgt uit [13], 3.333-1

Het energieverschil (vergelijking (2.4)) is dus:

$$\Delta E = -\frac{\pi^2 \hbar c S}{720 a^3}, \quad (2.22)$$

dus de Casimir-kracht is:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{d\Delta E}{da} \\ &= -\frac{\pi^2 \hbar c S}{240 a^4}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Hoofdstuk 3

Het Casimir-effect en het fotino

3.1 Supersymmetrie

We beginnen met een (ontzettend) korte inleiding op supersymmetrie (susy). Zie hiervoor ook § 11.3 van [6] en hfst. 28 van [7].

Supersymmetrie zegt dat elk deeltje een partnerdeeltje (superpartner) heeft waarbij de superpartner van een boson een fermion is en vice versa. (Zie tabel 3.1.) De superpartners, ook die van massaloze deeltjes, moeten massief zijn, omdat ze anders allang waren waargenomen. susy is dus een gebroken symmetrie.

Stel dat fotino's bestaan. We nemen aan dat ze op dezelfde manier interageren als fotonen, maar dat ze wel massief en fermionisch¹ zijn, zoals hierboven geëist wordt. Omdat fotonen hun eigen antideeltje zijn, zijn fotino's dat ook. Fotino's zijn dus Majorana-fermionen: spin- $\frac{1}{2}$ -deeltjes die hun eigen antideeltje zijn.

Tabel 3.1: De deeltjes van het Standaardmodel (links) en hun superpartners met hun spin (Minimal Supersymmetric Standard Model) (De verschillende leptonen en quarks worden niet expliciet genoemd.)

			spin				spin
ferm.	ℓ	lepton	$\frac{1}{2}$	bos.	$\tilde{\ell}$	slepton	0
	q	quark	$\frac{1}{2}$		\tilde{q}	squark	0
bosonen	γ	foton	1	fermionen	$\tilde{\gamma}$	fotino	$\frac{1}{2}$
	W	W-boson	1		\tilde{W}	Wino	$\frac{1}{2}$
	Z	Z-boson	1		\tilde{Z}	Zino	$\frac{1}{2}$
	g	gluon	1		\tilde{g}	gluino	$\frac{1}{2}$
	H	Higgs-boson	0		\tilde{H}	Higgsino	$\frac{1}{2}$

3.2 Kwantisatie van het Majoranaveld

Om het fotino-Casimir-effect af te leiden, moet eerst het Majoranaveld gekwantiseerd worden, net als het elektromagnetisch veld voor het al bekende foton-Casimir-effect. Omdat dit nu te ver voert, zal de kwantisatie van het Dirac-veld (kort) bestudeerd worden, om deze vervolgens aan

¹Ook al hebben ze een andere spin, ze hebben allebei twee mogelijkheden voor hun spin-kwantumgetal: het spin-kwantumgetal van het fotino kan $\pm\frac{1}{2}$ aannemen, omdat het een spin- $\frac{1}{2}$ deeltje is, en dat van het foton ± 1 . (Zie noot 3 van hoofdstuk 1 (pag. 4).)

te passen voor het Majoranaveld. De Dirac-kwantisatie is ontleend aan § 5.2 van [1] en § 3.10 van [2].

Dirac-fermionen zijn net als Majorana-fermionen spin- $\frac{1}{2}$ -deeltjes, maar zijn ongelijk aan hun anti-deeltjes. Ze worden beschreven door de Dirac-vergelijking, die geschreven kan worden als:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} - \beta m c^2 \right) \psi = 0. \quad (3.1)$$

Hierin is ψ de toestandsfunctie (geen scalar, maar een Dirac-spinor: een kolomvector met 4 componenten) die afhangt van de 4-plaatsvector in de Minkowski-ruimte en is m de massa van het Dirac-deeltje, in ons geval dus de fotinomassa. Verder zijn β en de drie componenten van $\boldsymbol{\alpha}$ bepaalde 4×4 -matrices.

Net als in § 1.2 nemen we weer periodieke randvoorwaarden aan voor een doos met ribben L_x , L_y en L_z , zodat ψ net als de vectorpotentiaal geschreven kan worden als Fourier-reeks.

De Hamiltoniaan van dit veld kunnen we bepalen via de energiedichtheid ρ_H :

$$\begin{aligned} H_{\text{Dirac}} &= \int_{\text{doos}} d^3\mathbf{r} \rho_H \\ &= \int_{\text{doos}} d^3\mathbf{r} \psi^\dagger i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \\ &= \int_{\text{doos}} d^3\mathbf{r} \psi^\dagger \left(-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m c^2 \right) \psi \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \left(|a_{\mathbf{p},\lambda}|^2 - |b_{\mathbf{p},\lambda}|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

In de laatste stap is ψ als Fourier-reeks ingevuld en zijn bepaalde orthogonaliteitsrelaties gebruikt. De sommatie $\sum_{\mathbf{p}}$ loopt over alle mogelijke impulsen:

$$p_j = \frac{2\pi\hbar}{L_j} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

(voor $j \in \{x, y, z\}$) en \sum_{λ} over de beide helicitetswaarden $\pm \frac{1}{2}$. Verder zijn $a_{\mathbf{p},\lambda}$ en $b_{\mathbf{p},\lambda}$ de Fouriercoëfficiënten van ψ .³

We kunnen weer kwantiseren door van de Fourier-coëfficiënten creatie- en annihilatieoperatoren te maken. Als we ze aan bosonische commutatierelaties (1.20) laten voldoen, gaat het niet goed, omdat de Hamiltoniaan dan niet van onderen is begrensd. We hebben een uitsluitingsprincipe nodig. De fermionische commutatierelaties (1.21) voorzien hierin. (Zie het einde van § 1.3.) Dus:

$$\left\{ \hat{a}_{\mathbf{p},\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{p}',\lambda'}^\dagger \right\} = \left\{ \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda}, \hat{b}_{\mathbf{p}',\lambda'}^\dagger \right\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.4)$$

Alle andere anticommutatoren zijn 0. We interpreteren $\hat{a}_{\mathbf{p},\lambda}$ als de creatieoperator van een deeltje met impuls \mathbf{p} en helicitetswaarde (spin) λ en $\hat{b}_{\mathbf{p},\lambda}$ de creatieoperator van het bijbehorende antideeltje.

²In Feynman-slash-notatie:

$$(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0.$$

³Merk op dat ze hier niet elkaars complex geconjugeerden zijn, wat bij het EM-veld wel het geval was. Dit is omdat ψ niet reëel hoeft te zijn.

De Hamilton-operator wordt nu dus:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{Dirac}} &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \left(\hat{a}_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},\lambda} - \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda} \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \right) \\
&= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \left(\hat{a}_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},\lambda} + \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda} - 1 \right) \\
&= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \left(\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(+)} + \hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(-)} - 1 \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

waarin $\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(+)} = \hat{a}_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},\lambda}$ en $\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(-)} = \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},\lambda}$ teloperatoren van respectievelijk deeltjes en antideeltjes zijn.

Om nu de Hamiltoniaan van het Majoranaveld te krijgen, wordt $\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(+)} = \hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(-)} = \hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}$ genomen en vermenigvuldigd met een factor $\frac{1}{2}$ om dubbeltellen te voorkomen:⁴

$$\hat{H}_{\text{Majorana}} = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \left(\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda} - \frac{1}{2} \right). \tag{3.6}$$

De vacuüm-energie-eigenwaarde is:

$$\begin{aligned}
E_{\text{Majorana},0} &= -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\
&= -\sum_{\mathbf{p}} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\
&= -\hbar c \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2} \\
&= -\hbar c \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{2\pi n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_z}{L_z} \right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

In de derde stap is gebruikt dat $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$.

Het fotonveld heeft dus ook een nulpuntsenergie. De vacuüm-energie is hetzelfde als van het fotonveld (vergelijking (1.29)), met het verschil dat er een extra term $\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2$ in de wortel staat en dat de energie negatief is. Voor het fotonvacuüm moet er dus ook een Casimir-effect zijn!

⁴Je kunt het ook zien als het vervangen van de twee $\left(\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(\pm)} - \frac{1}{2} \right)$ -termen door $\left(\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda} - \frac{1}{2} \right)$:

$$\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(+)} + \hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(-)} - 1 = \left(\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(+)} - \frac{1}{2} \right) + \left(\hat{N}_{\mathbf{p},\lambda}^{(-)} - \frac{1}{2} \right) \rightarrow \hat{N}_{\mathbf{p},\lambda} - \frac{1}{2}.$$

3.3 Het fotino-Casimir-effect

Op dezelfde manier als in hoofdstuk 2 kan nu het energieverval voor het fotino-Casimir-effect berekend worden:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\tilde{\gamma}} &= -\frac{\hbar c S}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_{\tilde{\gamma}} c}{\hbar}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi t}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_{\tilde{\gamma}} c}{\hbar}\right)^2} \right) \\
&= -\frac{\hbar c S}{4\pi} \int_0^{\infty} dk_s k_s \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_s^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_{\tilde{\gamma}} c}{\hbar}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{k_s^2 + \left(\frac{\pi t}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_{\tilde{\gamma}} c}{\hbar}\right)^2} \right) \\
&= -\frac{\pi^2 \hbar c S}{4a^3} \int_0^{\infty} dy y \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{y^2 + n^2 + M^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{y^2 + t^2 + M^2} \right) \\
&= i \frac{\pi^2 \hbar c S}{2a^3} \int_0^{\infty} dy y \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt \sqrt{y^2 + M^2 - t^2}}{\exp(2\pi(t + \epsilon)) - 1} \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{a^3} \int_0^{\infty} dy y \int_{\sqrt{y^2 + M^2}}^{\infty} \frac{dt \sqrt{t^2 - y^2 - M^2}}{\exp(2\pi t) - 1} \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{a^3} \int_M^{\infty} \frac{dt}{\exp(2\pi t) - 1} \int_0^{\sqrt{t^2 - M^2}} dy y \sqrt{t^2 - y^2 - M^2} \\
&= -\frac{\pi^2 \hbar c S}{3a^3} \int_M^{\infty} \frac{dt}{\exp(2\pi t) - 1} (t^2 - y^2 - M^2)^{3/2} \Big|_{y=0} \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{3a^3} \int_M^{\infty} \frac{dt (t^2 - M^2)^{3/2}}{\exp(2\pi t) - 1}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

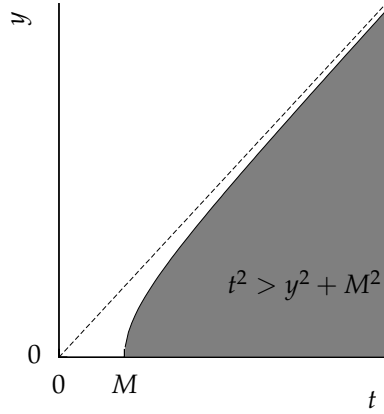
Hierin is $m_{\tilde{\gamma}}$ de fotinomassa. In de tweede stap is weer op poolcoördinaten in het (k_x, k_y) -vlak overgegaan. In de derde stap is $k_s = \frac{\pi y}{a}$ gesubstitueerd en is $M = \frac{cam_{\tilde{\gamma}}}{\pi \hbar}$ genomen. In de vierde is (2.10) gebruikt en in de vijfde (2.18). In de zesde is van integratievolgorde gewisseld (zie figuur 3.1).

Het totale energieverval is dus:

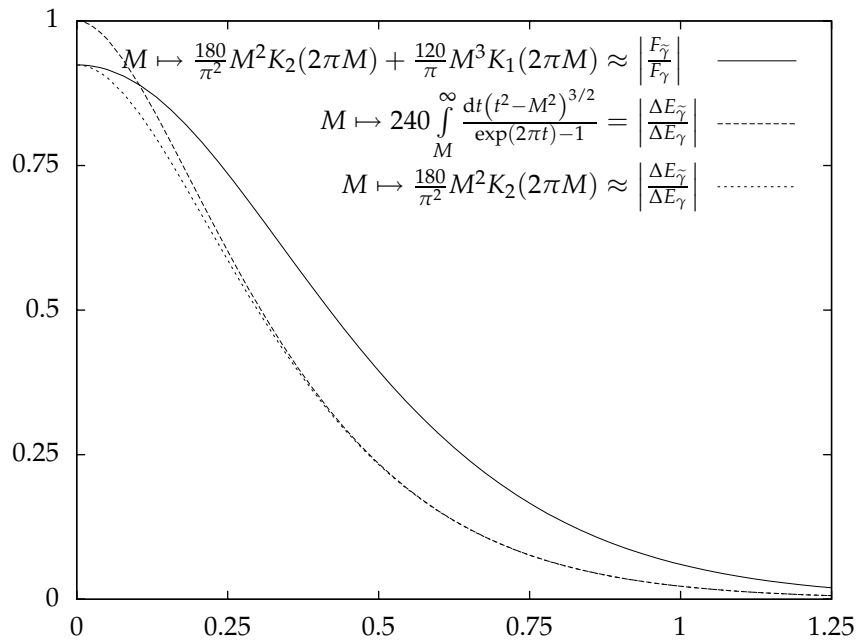
$$\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta E_{\gamma} + \Delta E_{\tilde{\gamma}} \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{720a^3} \left(-1 + 240 \int_M^{\infty} \frac{dt (t^2 - M^2)^{3/2}}{\exp(2\pi t) - 1} \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Merk op dat $\Delta E|_{m_{\tilde{\gamma}}=0} = 0$. De relatieve fotino-bijdrage hieraan is:

$$\left| \frac{\Delta E_{\tilde{\gamma}}}{\Delta E_{\gamma}} \right| = 240 \int_M^{\infty} \frac{dt (t^2 - M^2)^{3/2}}{\exp(2\pi t) - 1} \tag{3.10}$$



Figuur 3.1: Het integratiegebied in het (t, y) -vlak, vijfde en zesde regel van vergelijking (3.8)



Figuur 3.2: $\left| \frac{\Delta E_{\tilde{\gamma}}}{\Delta E_{\gamma}} \right|$, zijn benadering en de benadering van $\left| \frac{F_{\tilde{\gamma}}}{F_{\gamma}} \right|$ als functie van M

Stel nu dat M groot is. Dan kan dit als volgt benaderd worden:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta E_{\tilde{\gamma}}}{\Delta E_{\gamma}} \right| &\approx 240 \int_M^{\infty} dt (t^2 - M^2)^{3/2} \exp(-2\pi t) \\
&= \frac{240}{\pi^2 \sqrt{\pi}} M^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) K_2(2\pi M) \\
&= \frac{180}{\pi^2} M^2 K_2(2\pi M),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

In de eerste stap is gebruikt dat voor $t > M$, $\exp(2\pi t) \gg 1$, omdat M groot is. In de tweede stap is gebruikt dat voor $M, \Re\nu, \Re\mu > 0$:

$$\int_M^{\infty} dt (t^2 - M^2)^{\nu-1} \exp(-\mu t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2M}{\mu}\right)^{\nu-1/2} \Gamma(\nu) K_{\nu-1/2}(M\mu), \tag{3.12}$$

waarin K_{ν} de gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort is.⁵ In de derde stap is $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ ingevuld. In figuur 3.2 is te zien dat dit een goede benadering is.

De door het fotinovacuüm veroorzaakte Casimir-kracht is nu:

$$\begin{aligned}
F_{\tilde{\gamma}} &= -\frac{d\Delta E_{\tilde{\gamma}}}{da} \\
&= -\frac{d}{da} \frac{\pi^2 \hbar c S}{720a^3} \frac{180}{\pi^2} M^2 K_2(2\pi M) \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{240a^4} \left(\frac{180}{\pi^2} M^2 K_2(2\pi M) - \frac{60}{\pi^2} M \frac{d}{dM} M^2 K_2(2\pi M) \right) \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{240a^4} \left(\frac{180}{\pi^2} M^2 K_2(2\pi M) + \frac{120}{\pi} M^3 K_1(2\pi M) \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Hierbij is in de vierde stap gebruikt dat $\frac{d}{dz} z^{\nu} K_{\nu}(z) = -z^{\nu} K_{\nu-1}(z)$.⁶ De totale kracht is dus:

$$\begin{aligned}
F &= F_{\gamma} + F_{\tilde{\gamma}} \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c S}{240a^4} \left(-1 + \frac{180}{\pi^2} M^2 K_2(2\pi M) + \frac{120}{\pi} M^3 K_1(2\pi M) \right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

waarvan de relatieve fotinobijdrage

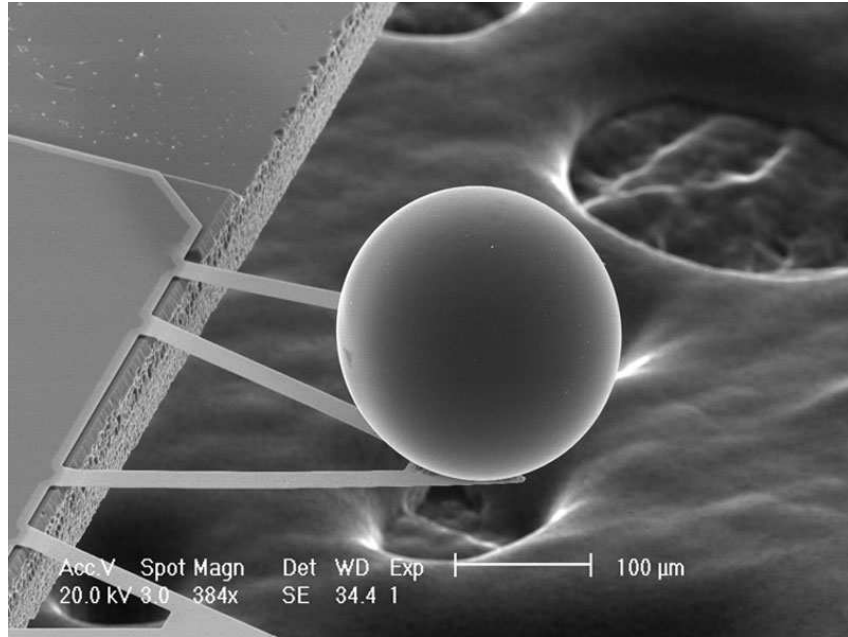
$$\left| \frac{F_{\tilde{\gamma}}}{F_{\gamma}} \right| = \frac{180}{\pi^2} M^2 K_2(2\pi M) + \frac{120}{\pi} M^3 K_1(2\pi M) \tag{3.15}$$

is.

3.4 Kan het fotino-effect waargenomen worden?

Nu komen we aan de eigenlijke vraag van deze scriptie: Kunnen we iets over de fotinomassa zeggen aan de hand van het Casimir-effect? Als dit het geval zou zijn, zou er experimentele deeltjesfysica bedreven kunnen worden zonder grote versnellers. Er zijn dan, kort door de bocht gezegd, alleen twee platen nodig om informatie uit het vacuüm te halen.

Laten we eerst kijken naar een Casimir-experiment dat werkelijk gedaan is. Mohideen & Roy ([8]) hebben in 1998 het Casimir-effect met een a tussen 0.1 en 0.9 μm met een onzekerheid van



Figuur 3.3: Het experiment van Mohideen & Roy ([8])

1% gemeten en kwam overeen met de theorie (van het foton-Casimir-effect).⁷ Dit betekent dat het fotino-effect binnen de fout moet liggen: $\left| \frac{F_{\tilde{\gamma}}}{F_{\gamma}} \right| \lesssim 0.01$. Vergelijking (3.15) numeriek oplossen levert $M \gtrsim 1.4$. Met $a \approx 0.1 \mu\text{m}$ levert dat $m_{\tilde{\gamma}} \gtrsim 1.5 \cdot 10^{-35} \text{ kg} \approx 8.4 \text{ eV}/c^2$. We hebben zo een ondergrens voor de fotinomassa gevonden. Deze zegt echter niets, omdat al is vastgesteld dat $m_{\tilde{\gamma}} \gtrsim 46 \text{ GeV}/c^2$.⁸

Laten we nu andersom kijken: Hoe nauwkeurig moet er gemeten worden (dus hoe groot moet $\left| \frac{F_{\tilde{\gamma}}}{F_{\gamma}} \right|$ zijn) om iets van het fotino-effect te zien? We weten dat als a en $m_{\tilde{\gamma}}$ kleiner worden, dus als M kleiner wordt, wordt de fotinobijdrage groter. Laten we nu de kleinst mogelijke ondergrenzen voor a en $m_{\tilde{\gamma}}$ nemen: $a \gtrsim 1 \text{ nm}$ (kleiner kan echt niet, vanwege de eindige atoomgrootte⁹) en $m_{\tilde{\gamma}} \gtrsim 46 \text{ GeV}/c^2$. Dan is $M \gtrsim 7.4 \cdot 10^7$. Met (3.15) kan berekend worden dat dan $\left| \frac{F_{\tilde{\gamma}}}{F_{\gamma}} \right| \lesssim 10^{-202520093}$. Tamelijk onmeetbaar dus.

⁵Zie [13], 3.387–6.

⁶Volgt uit [13], 8.486–14.

⁷Het experiment is niet met twee parallale platen gebeurd, maar met een plaat en een bol. (Zie figuur 3.3.) De uitdrukking voor de Casimir-kraft is in dit geval niet (2.23), maar (voor een bol met straal R) $F = -\frac{\pi^2 c h R}{360 a^3}$ (vergelijking (4.108) van [4] en (1) van [8]). We zullen aannemen dat dit voor onze berekening niets uitmaakt.

⁸Zie [9], pag. 84, die weer verwijst naar [10], § 7.2.2 en [11]. Eigenlijk gaat het in deze bronnen niet om $\tilde{\gamma}$, maar om $\tilde{\chi}_1^0$, een neutralino (een bepaald mengsel van $\tilde{\gamma}$, \tilde{Z} en \tilde{H}). Toch geeft dit een goede ondergrens, omdat $\tilde{\chi}_1^0$ in een bepaalde benadering puur $\tilde{\gamma}$ is ([9], pag. 1110). Bovendien is $\tilde{\chi}_1^0$ in de meeste susy-theorieën het lichtste supersymmetrische deeltje, dus is $46 \text{ GeV}/c^2$ een ondergrens voor alle superpartner-massa's.

⁹Zie [4], § 6.6.

Bibliografie

- [1] W.J.P. Beenakker, *Dictaat bij het college Kwantummechanica 3*, jaargang 2006–2007, Radboud Universiteit Nijmegen, http://www.hef.ru.nl/~beenakker/QM3_2006-2007.html
- [2] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967
- [3] H. B. G. Casimir, 'On the attraction between two perfectly conducting plates', *Proceedings Koninklijke Nederlanderlandse Akademie van Wetenschappen* **51** (1948), 793–795
- [4] M. Bordag, U. Mohideen & V.M. Mostepanenko, 'New developments in the Casimir effect', *Physics Reports* **353** (2001), 1–205
- [5] Herman de Lang, 'Het Casimir-effect: kracht uit het niets', *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* **71** (2005), 320–324
- [6] B. R. Martin & G. Shaw, *Particle Physics*, 2^e editie, Wiley, 1992/1997
- [7] Gordon Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1987
- [8] U. Mohideen & Anushree Roy, 'Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μm ', *Physical Review Letters* **81** (1998), 4549–4552
- [9] W.-M. Yao & al. (Particle Data Group), 'Review of Particle Physics', *Journal of Physics G* **33** (2006), 1–1232
- [10] DELPHI Collaboration, 'Searches for supersymmetric particles in $e^+ e^-$ collisions up to 208-GeV and interpretation of the results within the MSSM', *The European Physical Journal C* **31** (2003), 421–479
- [11] John Ellis, Toby Falk, Gerardo Ganis & Keith A. Olive, 'Supersymmetric dark matter in the light of CERN LEP and the Fermilab Tevatron collider', *Physical Review D* **62** (2000), 075010
- [12] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, deel 5: *Statistical Physics*, 3^e editie, Pergamon Press, 1959/1980
- [13] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik, 'Table of Integrals, Series, and Products', Academic Press, 1965/1980