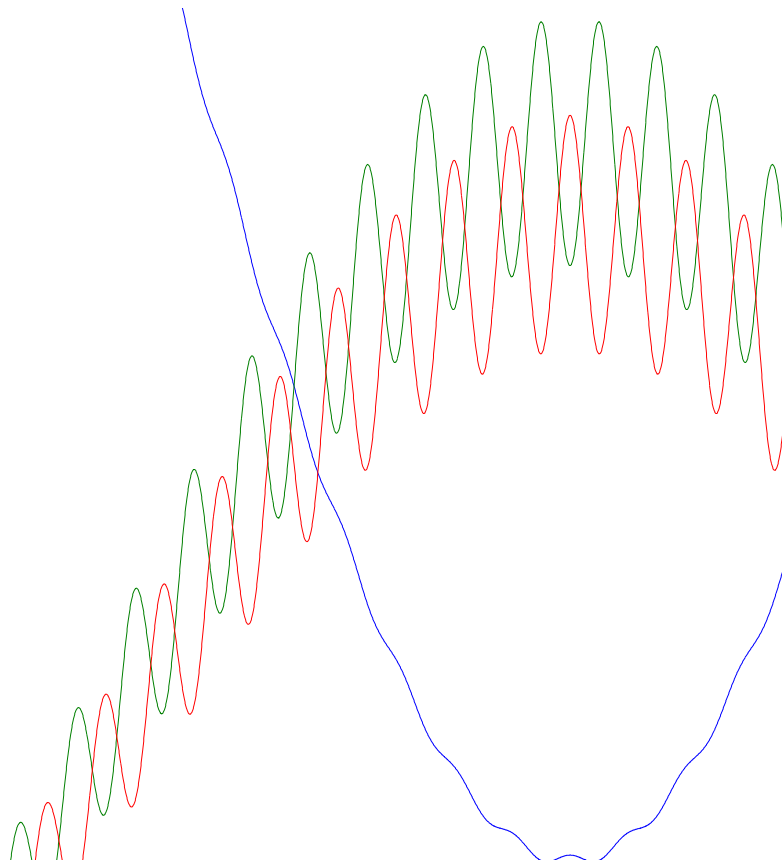


Neutrino-oscillatie

en het Mößbauer neutrino experiment

Martijn Jongen
Augustus 2011



Begeleider: dr. W.J.P. Beenakker
Theoretische Hoge-Energiefysica
IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Basistheorie	4
3	Oscillatiewaarschijnlijkheid	6
3.1	Gelijke-impulsaanname	6
3.2	Gelijke-energieaanname	8
3.3	Algemeen golfpakket	9
4	De Algemene Oscillatiewaarschijnlijkheid	11
4.1	Interpretatie	11
4.2	Lokalisatieconditie	14
4.3	Decoherentie	15
4.4	Behoud van waarschijnlijkheid	15
4.5	Limietgevallen: gelijke impuls en gelijke energie aannamen	16
4.6	Speciaal geval: gaussische golfpakketjes	18
5	Neutrino-oscillaties in beeld	23
5.1	Periode en amplitude voor een algemeen golfpakket	24
5.1.1	Afleiding	24
5.1.2	Visualisatie	25
5.1.3	Voorbeeld: overlevingskans van het elektronneutrino	26
5.2	Decoherentie voor een algemeen golfpakket	29
5.3	Lokalisatieconditie voor een algemeen golfpakket	29
6	Het Mößbauer neutrino experiment	29
6.1	Resonantie	29
6.2	Neutrinobron	30
6.3	Mößbauer effect	30
6.4	Praktische problemen	31
6.5	Theoretische uitwerking	31
6.6	Wel of geen oscillaties?	31
7	Conclusies	33
A	Bijlagen	34
A.1	Normalisatie van de Fourier-transformatie	34
A.2	Oscillatie-amplitudes in termen van menghoeken	35
A.3	Gemeten waarden van mixing parameters	36

1 Inleiding

Neutrino-oscillatie is een relatief jong onderzoeksgebied binnen de deeltjesfysica. In 1957 opperde Bruno Pontecorvo de mogelijkheid dat neutrino's van flavour zouden kunnen veranderen, maar pas in 1968 werd de eerste experimentele aanwijzing in deze richting gegeven. Bahcall en Davis stelden met hun *Homestake experiment* vast dat er minder elektronneutrino's door de zon uitgestraald worden dan verwacht werd op basis van het Standaard Zonnemodel. Dit zou verklaard kunnen worden door aan te nemen dat een deel van de elektronneutrino's onderweg omgezet wordt in μ - en τ -neutrino's. In 2001 werd door het Sudbury Neutrino Observatory vastgesteld dat de *gecombineerde* neutrinoflux inderdaad wél overeenkomt met de voorspelling. Dit was een sterke indicatie dat neutrino's van flavour kunnen veranderen.

Ondertussen is neutrino-oscillatie ook op andere manieren experimenteel waargenomen. De waarnemingen zijn verenigbaar met theoretische voorspellingen waarbij aangenomen wordt dat neutrino's massa hebben.

Vooraf op experimenteel gebied liggen er nog een hoop uitdagingen. Neutrino's zijn notoir moeilijk te detecteren: moderne neutrinodetectoren gebruiken kolossale hoeveelheden materie waarin zelfs met een hoge neutrinoflux slechts sporadisch een interactie optreedt. De geladen deeltjes die bij zulke interacties ontstaan kunnen gebruikt worden om informatie af te leiden over het neutrino. Uit het Čerenkov licht van de geladen reactieproducten kan bijvoorbeeld de energie, richting en soms zelfs de flavour van het invallende neutrino bepaald worden. Ook wordt er soms gekeken naar fotonen die ontstaan bij de annihilatie van de geladen reactieproducten.

In deze Bachelorscriptie bespreek ik de theoretische behandeling van neutrino-oscillaties in termen van quantummechanische golfpakketjes zoals die in de literatuur beschreven wordt. Dit leidt tot een inzichtelijke beschrijving van het fenomeen in termen van overlappende golfpakketten. Hoewel een gedetailleerde beschrijving van neutrino-oscillatie het gebruik van quantumveldentheorie vereist, kunnen we de belangrijkste eigenschappen met deze quantummechanische aanpak goed begrijpen.

De gevonden beschrijving pas ik vervolgens toe op het Mößbauer neutrino experiment dat - mits in de praktijk realiseerbaar - een zeer efficiënte detectie van elektron antineutrino's mogelijk zou maken met een typische oscillatie-afstand van slechts enkele meters. Dit zou een directe table-top observatie van neutrino-oscillaties mogelijk maken.

In Sectie 2 wordt een overzicht gegeven van de basistheorie betreffende neutrino-oscillaties alsmede een aantal notationale conventies. In Sectie 3 leid ik de oscillatiewaarschijnlijkheid af voor een algemeen golfpakket en in Sectie 4 bekijk ik de interpretatie, kenmerkende eigenschappen en enkele voorbeelden. In Sectie 5 leid ik de karakteristieken van neutrino-oscillatie voor een algemeen golfpakket

af uit de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid en maak ik deze karakteristieken zichtbaar in grafieken. In Sectie 6 bespreek ik het Mößbauer neutrino experiment en pas ik de kennis uit de eerdere secties toe op een theoretisch probleem dat dit met zich meebrengt.

2 Basistheorie

In deze sectie geef ik een kort overzicht van de relevante basistheorie betreffende neutrino-oscillaties en presenteer ik een aantal definities en vergelijkingen waar ik veel gebruik van zal maken.

Flavour

In het Standaardmodel zijn er drie verschillende soorten (“flavours”) neutrino’s: het elektron-, muon- en tau-neutrino, die via de zwakke interactie interageren met hun respectievelijke partnerlepton onder uitzending/absorptie van een W-boson.

Pmns-matrix

De eigentoestanden van de neutrino’s ten opzichte van de zwakke interactie (flavoureigentoestanden) zijn superposities van eigentoestanden van de vrije Hamilton-operator (massa-eigentoestanden). Neutrino flavoureigentoestanden ν_a (met $a \in \{e, \mu, \tau\}$) en massa-eigentoestanden ν_k (met $k \in \{1, 2, 3\}$) mengen volgens de PMNS-matrix (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) of *leptonic mixing matrix*:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}$$

Dit werkt als volgt. We kunnen een neutrinotoestand schrijven als kolomvector ten opzichte van de massabasis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |\nu_1\rangle; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\nu_2\rangle; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\nu_3\rangle$$

met respectievelijke massa-eigenwaarden m_1 , m_2 en m_3 . De flavoureigentoestanden vormen ook een basis. We kunnen door middel van de unitaire transformatie die gegeven wordt door de PMNS-matrix deze kolomvector omschrijven naar een kolomvector ten opzichte van de flavourbasis. In formulevorm:

$$|\nu_a\rangle = \sum_k U_{ak}^* |\nu_k\rangle$$

Voor *flavoureigentoestanden* zal ik steeds a en b als indices gebruiken. Voor *massa-eigentoestanden* zal ik j , k en r gebruiken.

De PMNS-matrix is overigens alléén unitair als er, zoals we verondersteld hebben, *drie* neutrinogeneraties zijn. Deze aanname wordt ondersteund door huidige experimenten, al is de mogelijkheid van een vierde neutrino-flavour nog niet volledig uitgesloten.

De PMNS-matrix kan ook geschreven worden in termen van de *menghoeken* θ_{12} , θ_{13} en θ_{23} , als het product van de volgende drie deelmatrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{23}) & \sin(\theta_{23}) \\ 0 & -\sin(\theta_{23}) & \cos(\theta_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{13}) & 0 & \sin(\theta_{13})e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{13})e^{i\delta} & 0 & \cos(\theta_{13}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{12}) & \sin(\theta_{12}) & 0 \\ -\sin(\theta_{12}) & \cos(\theta_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Volledig uitgeschreven krijgen we dan

$$U = \begin{bmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{23}s_{13}e^{i\delta}c_{12} - c_{23}s_{12} & -s_{23}s_{13}e^{i\delta}s_{12} + c_{23}c_{12} & s_{23}c_{13} \\ -c_{23}s_{13}e^{i\delta}c_{12} + s_{23}s_{12} & -c_{23}s_{13}e^{i\delta}s_{12} - s_{23}c_{12} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}$$

waarbij $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ en $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$. De menghoeken worden niet voorspeld door de theorie. Ze moeten experimenteel bepaald worden.

Energie

De energie van een puntdeeltje wordt gegeven door

$$E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

met $p \equiv |\vec{p}|$. In de ultrarelativistische limiet, waarin $pc \gg mc^2$, kan dit benaderd worden als

$$E(p) \approx pc + \frac{m^2c^3}{2p} \quad (1)$$

Massaspectrum

De massa-eigenwaarden van de neutrino's zijn zo ontzettend klein dat ze nog niet direct gemeten zijn. Experimenten hebben tot nu toe alleen bovengrenzen weten te stellen. Het is noodzakelijk voor neutrino-oscillatie dat neutrino's een

- al is het zeer geringe - eindige massa hebben.

In oscillatie-experimenten kunnen we de *verschillen* tussen de *kwadraten* van de neutrino massa's meten. Dit levert ongeveer de volgende waarden (zie A.3):

$$\Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2 = 7.6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}^2}{c^4}$$

$$|\Delta m_{32}^2| = 2.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{eV}^2}{c^4}$$

zodat

$$\Delta m_{31}^2 \approx \Delta m_{32}^2$$

De eerste twee massa's liggen relatief dicht bij elkaar. Het teken van Δm_{31}^2 is niet bekend; m_3 kan dus zwaarder óf lichter zijn dan de andere twee. Verder zijn de absolute massa's niet bekend. Het is in principe zelfs mogelijk dat één van de neutrino's massaloos is.

Omdat bij de leptonen en quarks het lid uit de derde generatie steeds veel zwaarder is dan de leden uit de eerste twee generaties zou men intuïtief een soortgelijk massaspectrum kunnen verwachten bij de neutrino's. Het geval waarin m_3 het zwaarst is wordt daarom het *normale* massaspectrum genoemd. De andere mogelijkheid wordt het *geïnverteerde* massaspectrum genoemd.

3 Oscillatiewaarschijnlijkheid

Uit experimenten weten we dat de flavour van neutrino's niet behouden is. Een muon-neutrino dat boven in de aardatmosfeer ontstaat, bijvoorbeeld, kan aan de andere kant van de aarde gedetecteerd worden als een tau-neutrino. Dit komt doordat de flavoureigentoestanden van het neutrino superposities zijn van massa-eigentoestanden. Bij vrije propagatie evolueren de verschillende massa-eigentoestanden elk anders in de tijd. Zoals we zullen zien zorgt dit er voor dat de flavour (of liever gezegd: de waarschijnlijkheid van elke flavoureigentoestand) *oscilleert* naarmate het neutrino zich voortplant.

Er zijn twee veelgebruikte en relatief makkelijke manieren om dit oscillatiegedrag af te leiden, maar beiden vereisen een onfysische aanname. Ik zal beginnen met deze twee methoden en vervolgens overgaan tot de vollediger en correctere afleiding in termen van golfpakketjes. In het volgende gebruik ik de aanpak beschreven in [1].

3.1 Gelijke-impulsaanname

We beschouwen een neutrino toestand $|\nu(t)\rangle$ die op $t = 0$ correspondeert met de flavoureigentoestand $|\nu_a\rangle$. Dat wil zeggen

$$\langle \nu_b | \nu(t = 0) \rangle \propto \delta_{ab}$$

Zoals beschreven in het hoofdstuk *Basistheorie* kan de flavoureigentoestand a geschreven worden als superpositie van massa-eigentoestanden:

$$|\nu_a\rangle = \sum_k U_{ak}^* |\nu_k\rangle$$

We nemen nu aan dat de massa-eigentoestanden $|\nu_k\rangle$ allemaal dezelfde, welgedefiniëerde impuls \vec{p} hebben. Daardoor heeft elke massa-eigentoestand een welgedefiniëerde energie E_k gegeven door

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_k^2 c^4}$$

waarbij m_k de massa van de k^e massa-eigentoestand is. De tijdsevolutie van het vrije systeem wordt dan gegeven door

$$|\nu(t)\rangle = \sum_k U_{ak}^* e^{-iE_k t/\hbar} |\nu_k\rangle$$

Door het inproduct te nemen met de flavour b eigentoestand krijgen we de waarschijnlijkheidsamplitude om het deeltje te vinden met flavour b :

$$\begin{aligned} A_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(t) &\equiv \langle \nu_b | \nu(t) \rangle \\ &= \sum_{j,k} U_{bj} U_{ak}^* e^{-iE_k t/\hbar} \langle \nu_j | \nu_k \rangle \\ &= \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{-iE_k t/\hbar} \end{aligned}$$

Omdat neutrino's zo'n ontzettend kleine massa hebben zijn ze vrijwel altijd ultrarelativistisch. We mogen daarom de benadering in verg. 1 gebruiken. Dit levert

$$A_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(t) \approx \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{-i \left[pc + \frac{m_k^2 c^3}{2p} \right] t/\hbar}$$

Nu halen we alle k -onafhankelijke termen buiten de som.

$$A_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(t) \approx e^{-i \left(pc + \frac{m_j^2 c^3}{2p} \right) t/\hbar} \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 c^3}{2p} t/\hbar}$$

waarbij $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ en m_j één van de drie neutrinomassa's is. Deze schrijfwijze verduidelijkt dat de waarschijnlijkheid, gegeven door het absolute kwadraat van de kansamplitude, alléén afhangt van de *verschillen* tussen de gekwadraterde massa's:

$$P_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(t) \approx \left| \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 c^3}{2p} t/\hbar} \right|^2 \quad (2)$$

Merk op dat deze vergelijking niets zegt over de positie van het neutrino; in feite beschrijft dit een waarschijnlijkheid die uniform is over de gehele ruimte

en oscilleert in de tijd. We kunnen deze vergelijking interpreteren door een neutrino te modelleren als een puntdeeltje dat met de lichtsnelheid reist. In dat geval geeft deze vergelijking de correcte oscillatiewaarschijnlijkheid als functie van de reistijd van het deeltje. Daarvoor hebben we aan moeten nemen dat alle massa-eigentoestanden van het neutrino dezelfde, welgedefiniëerde impuls hebben.

3.2 Gelijke-energieaanname

Een andere manier van aanpak is aannemen dat de massa-eigentoestanden $|\nu_k\rangle$ dezelfde *energie* E hebben. De impuls van de k^e massa-eigentoestand wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned} p_k &= \sqrt{E^2/c^2 - m_k^2 c^2} \\ &\approx \frac{E}{c} - \frac{m_k^2 c^3}{2E} \end{aligned}$$

Om de afleiding simpel te houden beschouw ik de plaats en impuls in één dimensie. Dit kan makkelijk gegeneraliseerd worden naar drie dimensies. Het gaat er om de argumentatie te laten zien die tot de oscillatiewaarschijnlijkheid leidt.

De toestand van het neutrino wordt in de plaatsrepresentatie gegeven door

$$|\nu(x, t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} \sum_k U_{ak}^* e^{ip_k x/\hbar} |\nu_k\rangle$$

Door wederom het inproduct te nemen met de flavour b eigentoestand vinden we de waarschijnlijkheidsamplitude:

$$\begin{aligned} A_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(x, t) &\equiv \langle \nu_b | \nu(x, t) \rangle \\ &= e^{-iEt/\hbar} \sum_{j,k} U_{bj} U_{ak}^* e^{ip_k x/\hbar} \langle \nu_j | \nu_k \rangle \\ &= e^{-iEt/\hbar} \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{ip_k x/\hbar} \end{aligned}$$

De benadering voor de impuls levert

$$A_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(x, t) \approx e^{-iEt/\hbar} \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{i[E/c - m_k^2 c^3/2E]x/\hbar}$$

We halen weer de k -onafhankelijke termen buiten de som.

$$A_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(x, t) \approx e^{-iEt/\hbar} e^{i[E/c - m_j^2 c^3/2E]x/\hbar} \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 c^3}{2E} x/\hbar}$$

De oscillatiewaarschijnlijkheid wordt gegeven door het kwadraat van deze amplitude.

$$P_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(x) \approx \left| \sum_k U_{bk} U_{ak}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 c^3}{2E} x/\hbar} \right|^2 \quad (3)$$

Merk op dat deze waarschijnlijkheid tijdsonafhankelijk is. De benodigde interpretatie is weer die van een puntdeeltje dat met de lichtsnelheid reist. Vergelijking 3 geeft dan de flavourwaarschijnlijkheid als functie van de afgelegde afstand.

In de ultrarelativistische benadering geldt $E \approx pc$, zodat dit resultaat (gegeven de juiste interpretatie) identiek is aan verg. 2.

3.3 Algemeen golfpakket

We hebben gezien dat de gelijke impuls- en energie-aannames allebei tot dezelfde oscillatiewaarschijnlijkheid leiden. Maar deeltjes worden in werkelijkheid beschreven door *golfpakketten* waarvan noch de positie noch de impuls en energie exact gedefinieerd zijn. Om neutrino-oscillaties volledig te kunnen beschrijven moet hier rekening mee worden gehouden.

De afleiding hieronder wordt beschreven in [1] en neemt het golfpakketkarakter van het neutrino mee zonder onfysische aannames te doen over de vorm van het golfpakket.

We beschouwen een neutrinotoestand $|\nu_a(t)\rangle$ die op $t = 0$ een flavoureigen-toestand is met flavour a , dat wil zeggen

$$\langle \nu_a(t=0) | \nu_b \rangle \propto \delta_{ab} \quad \forall b \in \{e, \mu, \tau\}$$

De massa-eigentoestanden $|\nu_k\rangle$ waaruit deze toestand is opgebouwd hebben elk hun eigen impulsverdeling $f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)$. Dit betekent dat we in de impulsrepresentatie kunnen schrijven

$$\langle \vec{p} | \nu_a(t=0) \rangle \equiv |\nu_a(\vec{p}, t=0)\rangle = \sum_k U_{ak}^* f_k(\vec{p} - \vec{p}_k) |\nu_k\rangle$$

We nemen aan dat de impulsverdelingsfuncties $f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)$ sterk gecentreerd zijn rond een gemiddelde impuls \vec{p}_k met spreiding $\sigma_p \ll p_k$. Verder eisen we dat de impulsverdelingsfuncties genormaliseerd zijn, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3p |f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)|^2 = 1$$

Dit is nodig om de normalisatie van $|\nu(t)\rangle$ te garanderen.

In de plaatsrepresentatie kunnen we $|\nu_a(t)\rangle$ schrijven als

$$\langle \vec{x} | \nu_a(t) \rangle \equiv |\nu_a(\vec{x}, t)\rangle = \sum_k U_{ak}^* \psi_k(\vec{x}, t) |\nu_k\rangle \quad (4)$$

waarbij $\psi_k(\vec{x}, t)$, de ruimtelijke golffunctie behorende bij de k^e massa-eigentoestand, gegeven wordt door

$$\psi_k(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f_k(\vec{p} - \vec{p}_k) e^{i[\vec{p}\cdot\vec{x} - E_k(p)t]/\hbar}$$

Het centrum van de distributie ligt op $t = 0$ bij $\vec{x} = \vec{0}$.

Omdat de impulsverdeling sterk gecentreerd is kan de energie benaderd worden met een Taylorreeks. Op eerste orde in $|\vec{p} - \vec{p}_k|$ geldt

$$E_k(p) \approx E_k(p_k) + (\vec{p} - \vec{p}_k) \cdot \vec{v}_k \quad (5)$$

waarbij $\vec{v}_k \equiv \vec{p}_k c^2 / E_k(p_k)$ de *groepsnelheid* is van het golfpakket behorende bij de k^e massa-eigentoestand.

Als we de benaderde energie (verg. 5) substitueren in de ruimtelijke golffuncties en de integratievariabele verschuiven volgt

$$\psi_k(\vec{x}, t) \approx \underbrace{e^{i[\vec{p}_k \cdot \vec{x} - E_k(p_k)t]/\hbar}}_{\text{fase factor}} \int \underbrace{\frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f_k(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot [\vec{x} - \vec{v}_k t]/\hbar}}_{\text{vorm factor}} \quad (6)$$

De integraal definiëren we als de *vormfactor* $g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)$. We introduceren de fase

$$\phi_k(\vec{x}, t) \equiv \frac{E_k(p_k)t - \vec{p}_k \cdot \vec{x}}{\hbar}$$

zodat we kunnen schrijven

$$\psi_k(\vec{x}, t) \approx e^{-i\phi_k(\vec{x}, t)} g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) \quad (7)$$

We kunnen verg. 7 zien als een vlakke golf met impuls \vec{p}_k , die door de vormfactor gelokaliseerd wordt in een gebiedje rond $\vec{v}_k t$. De volledige tijdsafhankelijke neutrino-toestand in de plaatsrepresentatie wordt nu beschreven door verg. 4 waarbij de $\psi_k(\vec{x}, t)$ gegeven worden door verg. 7.

Tot nu toe hebben we de afleiding gevolgd die beschreven wordt in [1]. De volgende stap in dat artikel is het definiëren van een gedetecteerde neutrino-toestand met zijn eigen impulsverdeling, waarvan vervolgens het inproduct met $|\nu_a(\vec{x}, t)\rangle$ bepaald kan worden. Ik zal het simpeler houden door alleen de projectie te nemen in de flavourruimte. We zijn tenslotte alleen geïnteresseerd in de flavour van het neutrino, niet in de impuls.

De waarschijnlijkheidsamplitude om een neutrino met flavour b te vinden op plaats \vec{x} en tijdstip t wordt gegeven door het inproduct van de flavoureigentoestand $|\nu_b\rangle$ met $|\nu_a(\vec{x}, t)\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}, t) &= \langle \nu_b | \nu_a(\vec{x}, t) \rangle \\ &= \sum_k U_{ak}^* U_{bk} \psi_k(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

Hieruit volgt de oscillatiewaarschijnlijkheid

$$P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) \approx \left| \sum_k U_{ak}^* U_{bk} e^{-i\Delta\phi_{kj}(\vec{x}, t)} g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) \right|^2 \quad (9)$$

waarbij

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{kj}(\vec{x}, t) &\equiv \phi_k(\vec{x}, t) - \phi_j(\vec{x}, t) \\
&= \frac{1}{\hbar} [(E_k(p_k) - E_j(p_j))t - (\vec{p}_k - \vec{p}_j) \cdot \vec{x}] \\
&\equiv \frac{1}{\hbar} [\Delta E_{kj}t - \Delta\vec{p}_{kj} \cdot \vec{x}] \tag{10}
\end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de vrijheid om te vermenigvuldigen met een complexe fasefactor ($e^{i\phi_j(\vec{x}, t)}$) om expliciet te laten zien dat alleen de faseverschillen van belang zijn.

Vergelijking 9 beschrijft de *algemene oscillatiewaarschijnlijkheid* voor een willekeurig neutrinogolfpakketje.

Voor later gebruik giet ik de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid in een alternatieve vorm. Uitschrijven van het absolute kwadraat levert

$$P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) = \sum_{k,r} U_{ak}^* U_{bk} U_{ar} U_{br}^* \psi_k(\vec{x}, t) \psi_r^*(\vec{x}, t)$$

Dit kunnen we korter schrijven als

$$P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) \approx \sum_{k,r} U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t)} G_{kr}(\vec{x}, t)$$

waarbij ik gebruik heb gemaakt van de korte notatie

$$U_{abkr} \equiv U_{ak}^* U_{bk} U_{ar} U_{br}^*$$

en een nieuwe definitie heb ingevoerd: de *overlapfunctie*

$$G_{kr}(\vec{x}, t) \equiv g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) g_r^*(\vec{x} - \vec{v}_r t) \tag{11}$$

Elke somterm wordt zijn eigen complex geconjugeerde onder verwisseling van k en r . Daardoor geldt

$$\begin{aligned}
P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) &\approx \sum_k |U_{ak}|^2 |U_{bk}|^2 |g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)|^2 \\
&\quad + 2Re \left[\sum_{k>r} U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t)} G_{kr}(\vec{x}, t) \right] \tag{12}
\end{aligned}$$

Vergelijking 12 en vergelijking 9 zijn twee equivalente vormen van de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid.

4 De Algemene Oscillatiewaarschijnlijkheid

4.1 Interpretatie

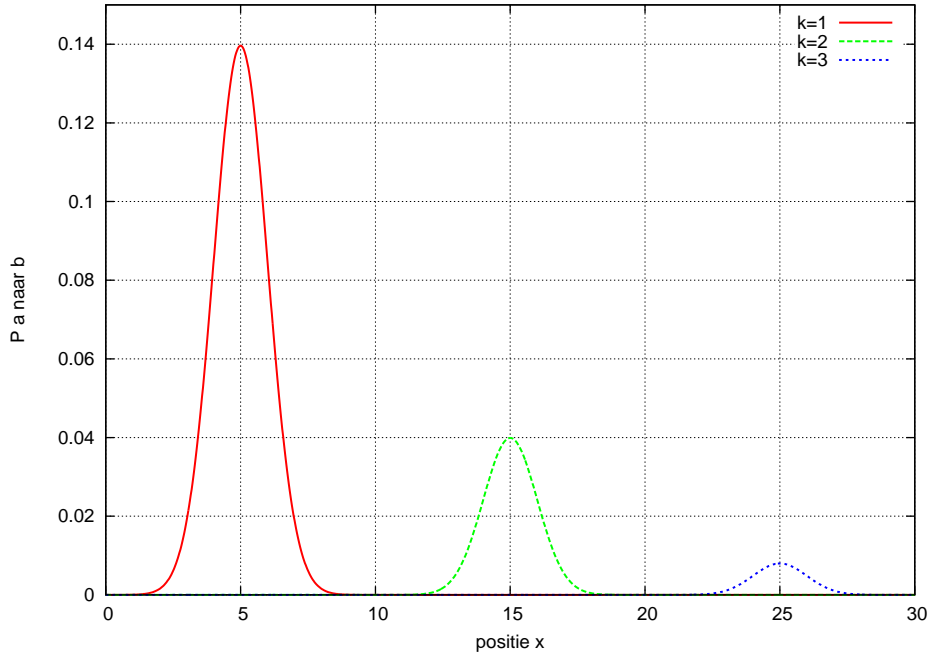
De algemene oscillatiewaarschijnlijkheid (verg. 12) die ik in de vorige sectie afgeleid heb oogt op het eerste gezicht ingewikkeld. Ik zal hier laten zien dat er desalniettemin een erg intuïtieve interpretatie van deze vergelijking mogelijk is.

De situatie zonder overlap

Vergelijking 12 bestaat uit een som over k en een som over $k > r$. We beschouwen allereerst het geval waarin de tweede som verwaarloosbaar is. De oscillatiewaarschijnlijkheid is dan de som van de absolute kwadraten van de vormfactoren, elk gewogen met PMNS-matrixelementen:

$$P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) \approx \sum_k |U_{ak}|^2 |U_{bk}|^2 |g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)|^2$$

De vormfactoren zijn gelokaliseerd rond $\vec{x} = \vec{v}_k t$. We kunnen ze interpreteren als *golffuncties* die *onafhankelijke* golfpakketjes beschrijven behorende bij de massa-eigentoestanden $|\nu_k\rangle$. De weegfactoren representeren losjes gezegd “de hoeveelheid massa-eigentoestand k in de flavoureigentoestand a (of b)”. Het zjuist geschetste beeld wordt schematisch weergegeven in fig. 1.



Figuur 1: Schematische weergave van de oscillatiewaarschijnlijkheid $P_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(x)$ voor het geval van niet-overlappende vormfactoren. Elke piek correspondeert met een onafhankelijk “massa-eigentoestand golfpakket”. De maxima bevinden zich op $x = v_k t$. Het oppervlak onder elke piek is $|U_{ak}|^2 |U_{bk}|^2$ (de numerieke waarde van deze factoren en de vorm van de golfpakketten zijn hier voor illustratieve doeleinden willekeurig gekozen).

De situatie mét overlap

Nu kijken we wat er gebeurt als ook de tweede som in verg. 12 een rol gaat spelen. Deze som,

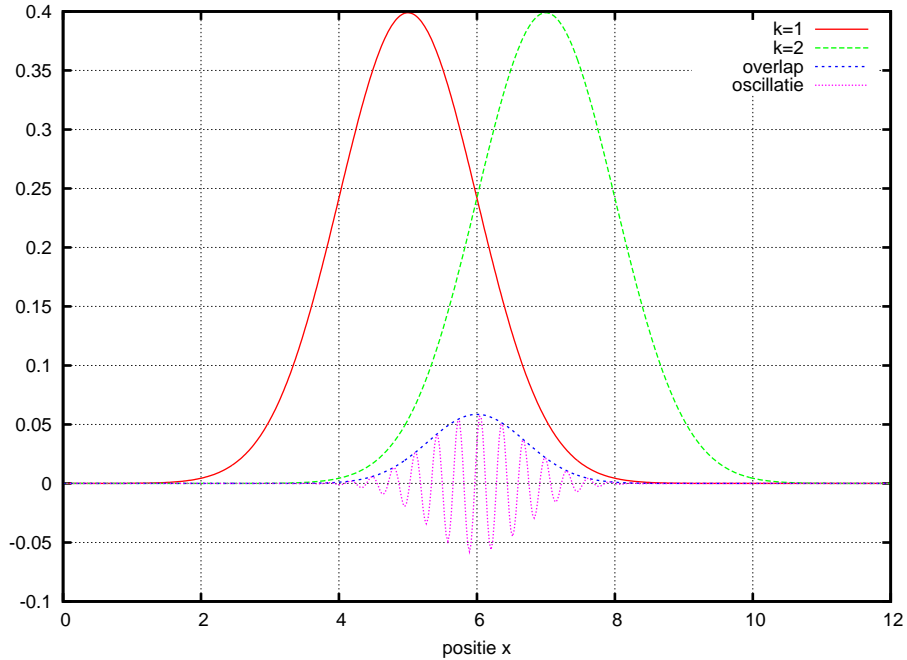
$$\sum_{k>r} 2\text{Re} \left[U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x},t)} G_{kr}(\vec{x},t) \right]$$

interpreteren we analoog aan de vorige. Er zijn een paar kleine verschillen: een factor twee, het feit dat alleen het reële deel meetelt en de logische generalisatie van de weegfactoren. Maar de belangrijkste twee verschillen zijn dat

- de rol van de golffuncties nu vervuld wordt door de *overlapfuncties*. Zoals de naam suggereert beschrijven deze de ruimtelijke overlap tussen de vormfactoren. De situatie van de vorige paragraaf correspondeert dus met vormfactoren die geen overlap hebben.
- elke term nu een *plaats- en tijdsafhankelijke fase* bevat die zorgt voor oscillatie. Merk op dat er in de situatie van de vorige paragraaf *geen* oscillatie was.

We kunnen hieruit opmaken dat op plaatsen waar twee golfpakketjes elkaar overlappen er een oscillerende bijdrage aan de oscillatiewaarschijnlijkheid ontstaat. Dit wordt schematisch weergegeven in figuur 2.

Samenvattend interpreteren we de meetwaarschijnlijkheid van het neutrino nu als veroorzaakt door drie verschillende golffuncties, elk corresponderend met een massa-eigentoestand, die op de plaatsen waar ze elkaar overlappen een oscillerende term bijdragen met fase $\phi_{kr}(\vec{x},t)$.



Figuur 2: Schematische weergave van twee overlappende “massa-eigentoestand golfpakketten” op een bepaald tijdstip. De lijnen gelabeld $k = 1$ en $k = 2$ geven de functies $|g_1(x - v_1 t)|^2$ en $|g_2(x - v_2 t)|^2$ weer. De derde vormfactor wordt even buiten beschouwing gelaten. De lijn gelabeld *overlap* geeft de absolute waarde $|G_{21}(x, t)|$ van de bijbehorende overlapfunctie weer. De lijn gelabeld *oscillatie* representeert tenslotte het product van de overlapfunctie met de ruimtelijk oscillerende fase. De weegfactoren zijn weer willekeurig gekozen. De frequentie van de fase-oscillatie is voor illustratieve doeleinden sterk overdreven weergegeven: in een typische situatie zal de golflengte ervan vele malen groter zijn dan de typische afmeting van het omhullende overlapgolfpakket.

4.2 Lokalisatieconditie

Als we aannemen dat we het neutrino detecteren met een detectorcel waarin het neutrino volledig bevat is - d.w.z. we hebben niet genoeg resolutie om de vorm van het golfpakket te kunnen onderscheiden - kunnen we het netto effect van de oscillatie uitrekenen door te integreren over het hele golfpakket. Als de oscillatietermen zo wild oscilleren als figuur 2 suggereert, zal hun netto bijdrage (de ruimtelijke integraal over het golfpakket) aan de oscillatiewaarschijnlijkheid verdwijnen. Hieruit concluderen we dat de oscillatie-afstand $\frac{2\pi\hbar}{|\Delta\vec{p}_{kr}|}$ van de term $e^{-i\Delta\phi_{kr}}$ *niet veel kleiner* mag zijn dan de ruimtelijke spreiding van de golfpakketjes om oscillatie mogelijk te maken. Op deze voorwaarde, de zogenaamde *lokalisatieconditie*, zal ik later nog uitgebreider ingaan.

Op basis van figuur 2 verwachten we het volgende gedrag:

- als de oscillatie-afstand van de complexe fase *veel groter* is dan de typische afmeting van het golfpakket worden neutrino-oscillaties helemaal niet onderdrukt
- als de twee lengtes van *dezelfde grootte-orde* zijn worden de oscillaties gedempt
- als de oscillatie-afstand *veel kleiner* is dan het golfpakket worden de oscillaties verwaarloosbaar

4.3 Decoherentie

De drie vormfactoren hebben verschillende groepssnelheden. Het is daarom te verwachten dat ze uiteindelijk uit elkaar zullen bewegen tot ze elkaar niet meer overlappen. We verwachten op grond hiervan dat eventuele neutrino-oscillaties uitdempen op een karakteristieke lengteschaal die afhankelijk is van het verschil tussen de groepssnelheden. Dit noemen we *decoherentie*. Ook hier zal ik verderop uitgebreider op ingaan.

4.4 Behoud van waarschijnlijkheid

De algemene oscillatiewaarschijnlijkheid snijdt alleen hout als de totale waarschijnlijkheid om een neutrino te vinden, gesommeerd over alle drie de flavours, optelt tot één. Hier zal ik als een snelle controle laten zien dat er inderdaad aan deze eis voldaan wordt.

We willen graag dat

$$P_{\text{tot}} \equiv \sum_{b=1}^3 \int P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) d^3x = 1$$

voor elk tijdstip t . Ik zal laten zien dat dit inderdaad het geval is.

Beschouw de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid zoals gegeven door vergelijking 12. Als we sommeren over b en integreren over \vec{x} wordt de eerste term van deze vergelijking

$$\sum_{b,k} |U_{ak}|^2 |U_{bk}|^2 \int |g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)|^2 d^3x$$

De vormfuncties $g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)$ zijn genormaliseerd (dit laat ik zien in hoofdstuk A.1). De integraal over \vec{x} levert dus 1 op voor elke k . De PMNS-matrix U voldoet aan de unitariteitsconditie, zodat

$$\sum_i U_{ij}^* U_{ik} = \sum_i U_{ji}^* U_{ki} = \delta_{jk}$$

Gebruik makend van deze eigenschap volgt dat de hele term reduceert tot 1.

De tweede term in vergelijking 12 bevat ook een som over elementen van U . Als we weer de unitariteitsconditie gebruiken, volgt

$$\sum_{k>r} U_{ak}^* U_{ar} \sum_b U_{bk} U_{br}^* = \sum_{k>r} U_{ak}^* U_{ar} \delta_{kr} = 0$$

De hele tweede term verdwijnt dus bij sommatie over b .

Hiermee is aangetoond dat de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid waarschijnlijkheid behoudt.

4.5 Limietgevallen: gelijke impuls en gelijke energie aannamen

In deze sectie zal ik een speciaal geval van verg. 12 uitwerken waarin we te maken hebben met scherp gepiekte impulsverdelingsfuncties. Afhankelijk van hoe we de impulsen kiezen kunnen we dit laten corresponderen met de gelijke impuls dan wel de gelijke energie-aanname uit 3.1 en 3.2. Ik zal laten zien dat deze gevallen corresponderen met de impliciete aanname van een ruimtelijk uniform golfpakket.

We nemen impulsverdelingsfuncties van de vorm

$$|f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)|^2 \equiv \frac{1}{\pi^{3/2} \epsilon^3} e^{-(\vec{p} - \vec{p}_k)^2 / \epsilon^2}$$

waarbij ϵ klein is. In de limiet dat ϵ naar 0 gaat geldt dan

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{p}_k)$$

We kiezen daartoe

$$f_k(\vec{p} - \vec{p}_k) = \frac{1}{\pi^{3/4} \epsilon^{3/2}} e^{-(\vec{p} - \vec{p}_k)^2 / 2\epsilon^2}$$

zodat nu in de limiet geldt

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_k(\vec{p} - \vec{p}_k) &= \sqrt{\delta(\vec{p} - \vec{p}_k)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{3/2} (4\pi)^{3/4} \delta(\vec{p} - \vec{p}_k) \end{aligned}$$

De vormfactor g_k wordt in de limiet gegeven door

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \epsilon^{3/2} (4\pi)^{3/4} \delta(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot [\vec{x} - \vec{v}_k t] / \hbar} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{3/2}}{\pi^{3/4} \hbar^{3/2}} \end{aligned}$$

De vormfactor is nu uniform over de ruimte en verdwijnt in de limiet. Hij is echter wel kwadratisch integreerbaar, zodat de overlapfuncties netjes genormaliseerd zijn:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3x G_{kr}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3p d^3q d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\delta(\vec{p})\delta(\vec{q})} e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-i[\vec{p}\cdot\vec{v}_k - \vec{q}\cdot\vec{v}_r]t/\hbar} \\ &= \int d^3p \delta(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{v}_k - \vec{v}_r)t/\hbar} \\ &= 1\end{aligned}$$

De overlapfuncties zijn nu constante termen zodat de oscillatiewaarschijnlijkheid (gegeven door vergelijking 12) reduceert tot

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^3}{\pi^{3/2}\hbar^3} \left[\sum_k |U_{ak}|^2 |U_{bk}|^2 + 2 \sum_{k>r} \text{Re} \left[U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t)} \right] \right] \quad (13)$$

Hierbij wil ik graag twee dingen opmerken

- De oscillatiewaarschijnlijkheid die we nu gevonden hebben heeft een plaatsafhankelijkheid. Deze is *niet* te interpreteren als de positie van het neutrino; die is tenslotte niet gedefinieerd voor een ruimtelijk uniforme golf-functie. We kunnen ons echter een voldoende kleine detectorcel voorstellen die zich op positie \vec{x} bevindt. Verg. 13 is dan te interpreteren als de plaats- en tijdafhangelijke meetkans voor deze detectorcel.
- We zien dat de meetkans schaalst met ϵ^3 en dus in de limiet naar nul gaat. Dit is te verwachten omdat het golfpakket in dit onrealistische voorbeeld een oneindig groot ruimtelijk volume $\propto \epsilon^{-3}$ inneemt. De kans om het neutrino in een specifiek stukje ruimte te vinden is dus oneindig klein.

Afgezien hiervan zien we dat het oscillatiegedrag volledig bepaald wordt door de fase $\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t)$. We gaan het gedrag van de fase nu bekijken in twee verschillende benaderingen.

Gelijke impulsen

We gebruiken weer de ultrarelativistische benadering voor de energie (verg. 1). In de gelijke impulsbenadering geldt daarmee dat $\Delta\vec{p}_{kr} = \vec{0}$ en $\Delta E_{kr} \approx \frac{\Delta m_{kr}^2 c^3}{2p}$, de fase wordt dan

$$\Delta\phi_{kr}(t) = \frac{\Delta m_{kr}^2 c^3}{2p} t / \hbar$$

Door deze fase in te vullen in verg. 13 vinden we een ruimtelijk uniforme meetkans die oscilleert in de tijd.

Gelijke energieën

We nemen aan dat de impulsvectoren \vec{p}_k allemaal in de \hat{z} -richting georiënteerd zijn, d.w.z. $\vec{p}_k = p_k \hat{z}$. Er geldt dan

$$\vec{p}_k \approx \left[E_k/c - \frac{m_k^2 c^3}{2E_k} \right] \hat{z}$$

Daaruit volgt $\Delta E_{kr} = 0$ en $\Delta \vec{p}_{kr} \approx -\frac{\Delta m_{kr}^2 c^3}{2E} \hat{z}$, met bijbehorende fase

$$\Delta \phi_{kr}(\vec{x}) = \frac{\Delta m_{kr}^2 c^3}{2E} \hat{z} \cdot \vec{x} / \hbar$$

Deze fase zorgt voor een eeuwig gelijkblijvende meetkans die oscilleert in de \hat{z} -richting.

Conclusie

Ik heb zojuist laten zien hoe de gelijke impuls- en gelijke energie-aannames er uit zien als ze volledig uitgewerkt worden in termen van golfpakketjes in de limiet van een oneindig scherp impulspectrum. Het is duidelijk dat dit geen realistisch geval beschrijft: de neutrino's hebben geen positie en het resultaat hangt bovendien af van welke benadering er gebruikt wordt. In de volgende sectie werk ik een realistischer voorbeeld uit.

4.6 Speciaal geval: gaussische golfpakketjes

Als tweede speciaal geval beschouw ik golfpakketjes met Gaussische impulsverdelingsfuncties omdat dit relatief makkelijk door te rekenen is en alle kenmerkende eigenschappen van neutrino-oscillatie vertoont. Een formule voor het gedrag van zulke golfpakketten wordt gegeven in [2]. Ik zal proberen een vergelijkbare formule af te leiden met de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid als beginpunt.

De impulsverdelingsfuncties $f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)$ zijn in dit geval drie-dimensionale, kwadratisch genormaliseerde Gaussische functies, gecentreerd rond \vec{p}_k :

$$f_k(\vec{p} - \vec{p}_k) = \frac{1}{(\sigma_{p_k} \sqrt{2\pi})^3} \exp \left[-\frac{(\vec{p} - \vec{p}_k)^2}{4\sigma_{p_k}^2} \right]$$

Hierin is σ_{p_k} de standaardafwijking in de impulsruimte van de bijbehorende waarschijnlijkheidsverdeling $|f_k(\vec{p} - \vec{p}_k)|^2$.

Vormfactoren

We gaan nu de vormfactoren $g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)$ berekenen. Uit de definitie (zie verg. 6) volgt

$$g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\sigma_{p_k} \sqrt{2\pi})^3} \exp \left[-\frac{\vec{p}^2}{4\sigma_{p_k}^2} + i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{v}_k t) / \hbar \right]$$

We gaan nu de e-macht als Gaussfunctie schrijven. We schrijven het argument als

$$-\frac{p^2}{4\sigma_{p_k}^2} + i\vec{p} \cdot [\vec{x} - \vec{v}_k t]/\hbar = -\left[\vec{Q}_k(\vec{p}, \vec{x}, t)\right]^2 - R_k(\vec{x}, t)$$

Waarbij $\vec{Q}_k(\vec{p}, \vec{x}, t)$ lineair moet zijn in \vec{p} .

Het is eenvoudig te controleren dat het juiste antwoord verkregen wordt met

$$\vec{Q}_k(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}}{2\sigma_{p_k}} - i\sigma_{p_k}[\vec{x} - \vec{v}_k t]/\hbar$$

en

$$R_k(\vec{x}, t) = \frac{\sigma_{p_k}^2}{\hbar^2}[\vec{x} - \vec{v}_k t]^2$$

zodat we kunnen schrijven

$$g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(\sigma_{p_k} \sqrt{2\pi})^{3/2}} e^{-R_k(\vec{x}, t)} \int e^{-\vec{Q}_k(\vec{p}, \vec{x}, t)^2} d^3 p$$

Veranderen van de integratievariabele ($d^3 p = (2\sigma_{p_k})^3 d^3 Q_k$) levert

$$g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) = \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_{p_k}}{\pi^{3/2}\hbar}\right)^{3/2} e^{-R_k(\vec{x}, t)} \int e^{-\vec{Q}_k^2} d^3 Q_k$$

We herkennen nu een driedimensionale Gauss-integraal in \vec{Q}_k met oplossing $\pi^{3/2}$. Voluit schrijven van $R_k(\vec{x}, t)$ levert

$$g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t) = \left(\frac{1}{\sigma_{x_k} \sqrt{2\pi}}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{[\vec{x} - \vec{v}_k t]^2}{4\sigma_{x_k}^2}\right]$$

met $\sigma_{x_k} \equiv \frac{\hbar}{2\sigma_{p_k}}$. Dit is (net als eerst) een kwadratisch genormaliseerde Gaussfunctie, maar nu in de plaatsruimte. Hij is gecentreerd rond $\vec{x} = \vec{v}_k t$ en de standaardafwijking van de bijbehorende waarschijnlijkheidsverdeling $|g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)|^2$ is σ_{x_k} . Dat is precies wat we verwachten: de vormfactor is maximaal op het punt waar men klassiek een puntdeeltje met snelheid \vec{v}_k verwacht op tijdstip t en voldoet bovendien aan de minimale onzekerheidsrelatie.

Overlapfuncties

Nu kunnen we de vormfactoren $g_k(\vec{x} - \vec{v}_k t)$ gebruiken om de overlapfuncties te berekenen. Invullen van het vorige resultaat in de definitie van de overlapfunctie (verg. 11) levert

$$\begin{aligned} G_{kr}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi\sigma_{x_k}\sigma_{x_r})^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{v}_k t)^2}{4\sigma_{x_k}^2} - \frac{(\vec{x} - \vec{v}_r t)^2}{4\sigma_{x_r}^2}\right] \\ &= \frac{e^{-R_{kr}(t)}}{(2\pi\sigma_{x_k}\sigma_{x_r})^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{v}_{kr} t)^2}{2\sigma_{x_{kr}}^2}\right] \end{aligned} \quad (14)$$

met groepssnelheid

$$\begin{aligned}\vec{v}_{kr} &= \frac{\sigma_{x_r}^2 \vec{v}_k + \sigma_{x_k}^2 \vec{v}_r}{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_r}^2} \\ &= \frac{\sigma_{p_k}^2 \vec{v}_k + \sigma_{p_r}^2 \vec{v}_r}{\sigma_{p_k}^2 + \sigma_{p_r}^2}\end{aligned}$$

en plaatsonzekerheid

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{kr}} &= \frac{\sqrt{2}\sigma_{x_k}\sigma_{x_r}}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_r}^2}} \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sqrt{\sigma_{p_k}^2 + \sigma_{p_r}^2}} \\ &\equiv \frac{\hbar}{2\sigma_{p_{kr}}}\end{aligned}$$

Verder krijgen we een *decoherentiefactor* $e^{-R_{kr}(t)}$ met

$$\begin{aligned}R_{kr}(t) &= \frac{\sigma_{p_k}^2 \sigma_{p_r}^2}{\sigma_{p_k}^2 + \sigma_{p_r}^2} \frac{(\vec{v}_k t - \vec{v}_r t)^2}{\hbar^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_r}^2} \frac{(\vec{v}_k t - \vec{v}_r t)^2}{4}\end{aligned}$$

Vergelijking 14 beschrijft een golfpakket dat gecentreerd is rond de positie $\vec{v}_{kr}t$. Uit de definitie van \vec{v}_{kr} volgt dat deze positie op de lijn tussen $\vec{v}_k t$ en $\vec{v}_r t$ ligt. De plaatsonzekerheid $\sigma_{x_{kr}}$ van het golfpakket is kleiner dan zowel $\sqrt{2}\sigma_{x_k}$ als $\sqrt{2}\sigma_{x_r}$.

De decoherentiefactor $e^{-R_{kr}(t)}$ representeert de afname van de overlap van de massa-eigentoestand golfpakketjes doordat hun maxima uit elkaar bewegen. De decoherentiefactor is natuurlijk één als de indices hetzelfde zijn.

Oscillatiewaarschijnlijkheid

De volledige formule voor de overgangswaarschijnlijkheid wordt gegeven door de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid met de overlapfuncties die we zojuist berekend hebben. We kunnen dit schrijven als

$$\begin{aligned}P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) &\approx \sum_{k,r} U_{abkr} \left(\frac{2\sigma_{x_k}\sigma_{x_r}}{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_r}^2} \right)^{3/2} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t)} \\ &\quad \times e^{-R_{kr}(t)} \text{Gauss}(\vec{x}, \vec{v}_{kr}t, \sigma_{x_{kr}})\end{aligned}\tag{15}$$

Waarbij $\text{Gauss}(\vec{x}, \vec{\mu}, \sigma)$ gedefiniëerd is als

$$\text{Gauss}(\vec{x}, \vec{\mu}, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{\mu})^2}{2\sigma^2}}$$

d.w.z. een driedimensionale Gaussfunctie in \vec{x} met verwachtingswaarde $\vec{\mu}$ en standaardafwijking σ waarvan het totale oppervlak onder de grafiek gelijk is aan 1.

We merken op dat de fasefactor, de decoherentiefactor en de factor met de σ 's gelijk worden aan één als $k = r$. Verder geldt $\vec{v}_{kk} = \vec{v}_k$ en $\sigma_{x_{kk}} = \sigma_{x_k}$.

In de vorm van vergelijking 12 kunnen we schrijven

$$\begin{aligned}
P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) &\approx \sum_k |U_{ak}|^2 |U_{bk}|^2 \text{Gauss}(\vec{x}, \vec{v}_k t, \sigma_{x_k}) \\
&+ \sum_{k>r} |U_{abkr}| \text{Gauss}(\vec{x}, \vec{v}_{kr} t, \sigma_{x_{kr}}) \\
&\times \left[C_{\text{geom}} \left(\frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_{x_r}} \right) \right]^3 e^{-R_{kr}(t)} 2 \cos(\Delta\phi_{kr} - \phi_{0,kr}) \quad (16)
\end{aligned}$$

waarbij

$$U_{abkr} = |U_{abkr}| e^{i\phi_{0,kr}}$$

en de geometrische factor

$$C_{\text{geom}}(r) = C_{\text{geom}}(1/r) \equiv \sqrt{\frac{2r}{r^2 + 1}}$$

Deze factor is gelijk aan één als het argument één is, en neemt af naarmate r verder van één afwijkt. Dit geeft het feit weer dat twee genormaliseerde Gauss-krommen elkaar minder overlappen naarmate hun spreiding meer verschilt.

Effectief oscillatiegedrag

Nu we de ruimte- en tijdsafhankelijke meetwaarschijnlijkheid hebben gevonden is de volgende stap om het effectieve oscillatiegedrag hieruit af te leiden. Dat wil zeggen: we willen het neutrino als een puntdeeltje interpreteren en de meetwaarschijnlijkheid als functie van de afstand tot de bron afleiden.

We kunnen iets zeggen over het effectieve resultaat van de meetwaarschijnlijkheid door deze te integreren over de volledige ruimte. We beschouwen het neutrino dan effectief als een puntdeeltje op de schaal van de detector; we nemen aan dat de detectieresolutie niet scherp genoeg is om afstanden van orde σ_x te onderscheiden. Het resultaat van de integratie is een tijdsafhankelijke kans om een bepaalde flavour te meten.

$$\begin{aligned}
P_{a \rightarrow b}^{\text{eff}}(t) &= \int d^3x P_{a \rightarrow b}(\vec{x}, t) \\
&\approx \sum_k U_{abkk} + \sum_{k>r} |U_{abkr}| \left[C_{\text{geom}} \left(\frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_{x_r}} \right) \right]^3 e^{-R_{kr}(t)} \\
&\times 2 \int d^3x \cos(\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t) - \phi_{0,kr}) \text{Gauss}(\vec{x}, \vec{v}_{kr} t, \sigma_{x_{kr}})
\end{aligned}$$

Om de integraal uit te voeren maken we gebruik van de identiteit

$$\int dx e^{-ax^2} \cos(kx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$$

Waaruit met enige moeite volgt dat

$$\int d^3x \text{Gauss}(\vec{x}, \vec{\mu}, \sigma) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi) = \cos(\varphi + \vec{k} \cdot \vec{\mu}) \exp\left[-\frac{\sigma^2 \vec{k}^2}{2}\right]$$

Het resultaat van de integraal is dan

$$\cos(\Delta\phi_{kr}(\vec{v}_{kr}t, t) - \phi_{0,kr}) \exp\left[-\left(\frac{\sigma_{x_{kr}} \Delta\vec{p}_{kr}}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2\right]$$

De kwadratische e-macht die we nu gevonden hebben is een manifestatie van de *lokalisatieconditie* die we verwachtten naar aanleiding van onze kwalitatieve bespreking in 4.2: hoe groter $\sigma_{x_{kr}}$ is ten opzichte van de oscillatie-afstand $\frac{2\pi\hbar}{|\Delta\vec{p}_{kr}|}$ van het ruimtelijke deel van de fase, hoe meer de oscillaties onderdrukt worden.

Het volledige resultaat van de berekening is de effectieve meetwaarschijnlijkheid

$$P_{a \rightarrow b}^{\text{eff}}(t) \approx \sum_k U_{abkk} + \sum_{k>r} |U_{abkr}| \left[C_{\text{geom}} \left(\frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_{x_r}} \right) \right]^3 e^{-R_{kr}(t)} \\ \times 2 \cos(\Delta\phi_{kr}(\vec{v}_{kr}t, t) - \phi_{0,kr}) \exp\left[-\left(\frac{\sigma_{x_{kr}} \Delta\vec{p}_{kr}}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2\right] \quad (17)$$

De meetwaarschijnlijkheid is nu vanwege de integratie over de ruimte gegeven als functie van de *tijd*. Het is echter praktischer en gangbaarder om neutrino-oscillaties uit te drukken in termen van *afstanden*. Aangezien we in de ultrarelativistische benadering werken kunnen we het tijdstip t uitdrukken in de (bij benadering) afgelegde afstand L van het neutrino. Het faseverschil is gedefinieerd als

$$\Delta\phi_{kr}(\vec{v}_{kr}t, t) = \frac{t}{\hbar} [\Delta E_{kr} - \Delta\vec{p}_{kr} \cdot \vec{v}_{kr}]$$

Met de benaderingen $v_{kr} \approx c$ en $L \approx ct$, en aannemende dat alle \vec{p}_k in dezelfde richting staan kunnen we dit schrijven als

$$\Delta\phi_{kr}(\vec{v}_{kr}t, t) \approx \frac{L}{c\hbar} [E_k(p_k) - E_r(p_r) - (p_k - p_r)c]$$

In de ultrarelativistische benadering geldt

$$p_k \approx \frac{E_k(p_k)}{c} - \frac{m_k^2 c^3}{2E_k(p_k)}$$

zodat het tijdsafhankelijke deel van het argument van de cosinus in verg. 17 geschreven kan worden als

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{kr}(\vec{v}_{kr}t, t) &\approx \frac{L\Delta m_{kr}^2 c^3}{2\hbar E} \\ &\equiv 2\pi \frac{L}{L_{kr}^{\text{osc}}}\end{aligned}$$

waarin de *oscillatielengtes* L_{kr}^{osc} gedefinieerd zijn als

$$L_{kr}^{\text{osc}} = \frac{4\pi\hbar E}{\Delta m_{kr}^2 c^3}$$

E is in deze lengtes de *gemiddelde waarde* van de neutrino-energie. Op dezelfde manier kunnen we de decoherentiefactor omschrijven als

$$\begin{aligned}R_{kr}(t) &= \left(\frac{(v_k - v_r)L}{2\sqrt{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_r}^2} \cdot c} \right)^2 \\ &\equiv \left(\frac{L}{L_{kr}^{\text{coh}}} \right)^2\end{aligned}$$

met *coherentielengtes*

$$L_{kr}^{\text{coh}} \equiv \sqrt{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_r}^2} \frac{4E^2}{\Delta m_{kr}^2 c^4}$$

E is weer de gemiddelde waarde van de neutrino-energie. Merk op dat deze decoherentielengte slechts een *benadering* is. In vergelijking 5 hebben we de energie benaderd tot op eerste orde in de impuls. Hiermee verwaarlozen we de vervorming van de golfpakketten. Op de afstanden waarop decoherentie optreedt kunnen deze effecten wel degelijk een rol gaan spelen.

De effectieve meetwaarschijnlijkheid wordt dan in termen van L gegeven door

$$\begin{aligned}P_{a \rightarrow b}^{\text{eff}}(L) &\approx \sum_k U_{abkk} + \sum_{k>r} |U_{abkr}| \left[C_{\text{geom}} \left(\frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_{x_r}} \right) \right]^3 \exp \left[- \left(\frac{L}{L_{kr}^{\text{coh}}} \right)^2 \right] \\ &\quad \times 2 \cos \left(2\pi \frac{L}{L_{kr}^{\text{osc}}} - \phi_{0,kr} \right) \exp \left[- \left(\frac{\sigma_{x_{kr}} \Delta \vec{p}_{kr}}{\sqrt{2}\hbar} \right)^2 \right] \quad (18)\end{aligned}$$

5 Neutrino-oscillaties in beeld

De oscillatiewaarschijnlijkheid kan gebruikt worden om de meetwaarschijnlijkheid te bepalen van een neutrino met flavour b als functie van de afstand tot de bron waar een neutrino met flavour a is uitgezonden. In deze Sectie zal ik de oscillatiekarakteristieken van een generiek golfpakket afleiden uit de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid en zal ik proberen dit begrijpelijk in beeld te brengen.

5.1 Periode en amplitude voor een algemeen golfpakket

5.1.1 Afleiding

De algemene oscillatiewaarschijnlijkheid bevat impliciet een lokalisatieconditie en effecten van decoherentie zoals aannemelijk gemaakt in Paragraaf 4.1 en expliciet uitgewerkt voor gaussische golfpakketten. In deze subsectie zullen we eerst het simpelste geval beschouwen, namelijk dat waarin die twee effecten verwaarloosbaar zijn. Dit correspondeert met de volgende twee concrete aannames: de neutrinoestand. . .

1. is zodanig gelokaliseerd dat de *lokalisatieconditie* (zie 4.2) een verwaarloosbare invloed heeft.
2. is nog *volledig coherent*. Dat wil zeggen dat de vormfuncties volledig overlappen zodat $\int G_{kr}(\vec{x}, t) d^3x = 1$ op de tijden die we beschouwen. We bekijken dus de situatie waarin de effecten van decoherentie (nog) verwaarloosbaar zijn.

Verderop zal ik uitwerken wat er gebeurt als deze aannames niet gelden.

We beginnen met de algemene oscillatiewaarschijnlijkheid in de vorm van vergelijking 12, waar deze is opgedeeld in twee stukken: één gewogen som over de drie vormfuncties en één over de drie overlapfuncties.

We zijn geïnteresseerd in de waarschijnlijkheid om een bepaalde flavour te meten. Deze waarschijnlijkheid varieert in principe binnen het golfpakket maar in een experiment hebben we typisch niet genoeg resolutie om de vorm van het golfpakket te ontwaren. Ik beschouw het neutrino als een puntdeeltje dat zich *of helemaal, of helemaal niet* binnen de detectorcel bevindt. Het netto-effect van dit ‘puntdeeltje’ verkrijg ik door de meetwaarschijnlijkheid te integreren over de hele ruimte.

Terugkerend naar verg. 12 zien we direct dat de integraal over de eerste som alleen afhangt van PMNS-matrix coëfficiënten (de vormfuncties zijn kwadratisch genormeerd op één). Er is dus geen oscillatiegedrag door deze termen.

We willen ook de tweede som in verg. 12 graag integreren over de ruimte maar dit is niet triviaal. Aanname nummer een van hierboven vertaalt zich nu in de volgende eis: de ruimtelijke spreiding van de overlapfunctie G_{kr} is veel kleiner dan de ruimtelijke periode van de complexe oscillatiefase. De oscillatiefase is dan bij benadering constant binnen het relevante integratiegebied zodat we hem buiten de integraal mogen halen. De integraal over de tweede som in verg. 12 wordt dan

$$\int 2\text{Re} \left[U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t)} G_{kr}(\vec{x}, t) \right] d^3x \approx 2\text{Re} \left[U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}_{av}(t), t)} \int G_{kr}(\vec{x}, t) d^3x \right] \quad (19)$$

waarbij $\vec{x}_{\text{av}}(t)$ de gemiddelde positie is van $G_{kr}(\vec{x}, t)$. Nu gebruiken we de tweede aanname:

$$\int G_{kr}(\vec{x}, t) d^3x = 1$$

Wat er nu overblijft van verg. 12 kan schematisch weergegeven worden als

$$P_{a \rightarrow b}(t) \approx (\text{const.}) + \sum_{k>r} 2\text{Re} \left[U_{abkr} e^{-i\Delta\phi_{kr}(\vec{x}_{\text{av}}(t), t)} \right]$$

Omdat we over de positie geïntegreerd hebben is deze meetwaarschijnlijkheid alleen nog afhankelijk van t . We moeten in gedachten houden dat we het neutrino gemodelleerd hebben als puntdeeltje: de meetwaarschijnlijkheid geldt alléén op de positie $\vec{x}_{\text{av}}(t)$ van het deeltje, daarbuiten is hij nul.

Voor een relativistisch golfpakket is $\vec{x}_{\text{av}}(t) \approx ct\hat{r}$, met \hat{r} de richting waarin het neutrino beweegt. De complexe fase is dan (net als voor gaussische golfpakketjes) te benaderen als

$$\Delta\phi_{kr}(\vec{x}_{\text{av}}(t), t) \approx \frac{c^3 \Delta m_{kr}^2 \hat{r} \cdot \vec{x}_{\text{av}}(t)}{2\hbar E}$$

Samenvattend zien we dat de meetwaarschijnlijkheid voor een algemeen golfpakket in het simpelste geval gegeven wordt door een constante plus een som van oscillerende termen met amplituden $2|U_{abkr}|$ en perioden (*oscillatielengten*)

$$L_{kr}^{\text{osc}} \equiv \frac{4\pi\hbar E}{c^3 \Delta m_{kr}^2} \approx 2.479 \cdot 10^{-6} \text{m} \times \frac{E [\text{eV}^2/c^4]}{[\text{eV}] \Delta m_{kr}^2}$$

De oscillatielengten worden volledig bepaald door de gemiddelde energie van het golfpakket en de verschillen in de gekwadraterde neutrinomassa's Δm_{kr}^2 .

5.1.2 Visualisatie

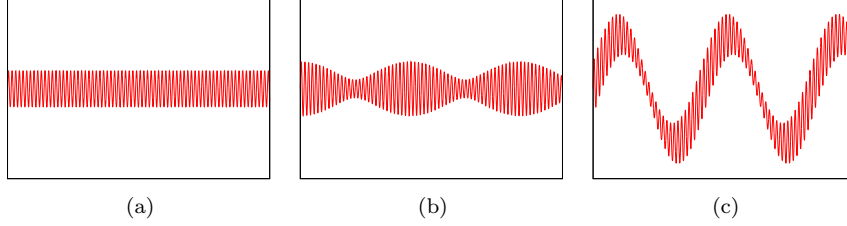
De meetwaarschijnlijkheid $\nu_a \rightarrow \nu_b$ is een som van een constante term en drie oscillerende termen. Hoe ziet dit er uit?

De oscillatielengten zijn omgekeerd evenredig aan de gekwadraterde massaverschillen Δm_{kr}^2 . We weten dat Δm_{31}^2 ongeveer gelijk is aan Δm_{32}^2 en dat Δm_{21}^2 in absolute waarde ongeveer dertig keer kleiner is. We hebben dus een som van

- twee oscillaties met een vergelijkbare periode: de *korte oscillatie-afstand* L_S
- één oscillatie met een dertig maal zo grote periode: de *lange oscillatie-afstand* $L_L \approx 30L_S$

De twee oscillaties met vergelijkbare periode leveren een nieuwe oscillatie op met een *amplitudezweving*, zoals weergegeven in figuur 3b. Voor het algemene geval

$$A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) + B \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_2}\right)$$



Figuur 3: Schematische weergave van een som van drie oscillaties.

a) enkele oscillatie met periode λ

b) som van twee oscillaties met ongeveer dezelfde periode. Het gevolg is een amplitudezweving met periode 30λ .

c) som van b) en een oscillatie met periode 30λ , het gevolg is een variërende centrale waarde.

met $\lambda_1 \approx \lambda_2$ varieert de amplitude van de resulterende golf tussen $A + B$ en $|A - B|$ over een periode

$$\lambda_{\text{zweving}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

In het geval van neutrino-oscillaties wordt de periode van de amplitudezweving bepaald door de gekwadrateerde massaverschillen:

$$\lambda_{\text{zweving}} = L_{21}^{\text{osc}}$$

De zweving heeft dus een periode van L_L .

De oscillatie met zweving (weergegeven in figuur 3b) heeft een vaste centrale waarde. Wanneer we de derde oscillerende term erbij optellen gaat de centrale waarde zelf oscilleren en wel met periode L_L . Dit is weergegeven in figuur 3c.

De amplitudes van de drie oscillatietermen hangen af van PMNS-matrixelementen. De amplitude van de *lange-afstandsoscillatie* (die met periode L_L) is $2U_{ab12}$ en de amplitude van de *korte-afstandsoscillatie* (die met periode L_S) varieert tussen $2(|U_{ab13}| + |U_{ab23}|)$ en $2(|U_{ab13}| - |U_{ab23}|)$. In tabel 1 staan enkele van deze amplitudes weergegeven.

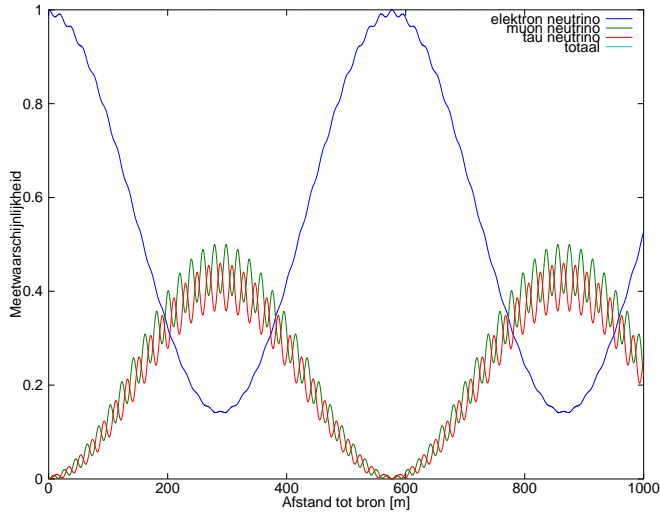
5.1.3 Voorbeeld: overlevingskans van het elektronneutrino

Als voorbeeld kijken we naar het geval $a = b = e$, de *overlevingskans* van het e -neutrino. Deze is weergegeven met een blauwe lijn in fig. 4.

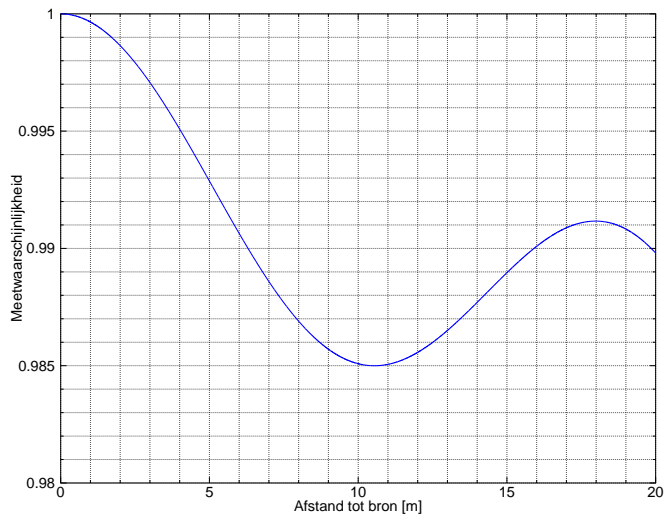
De waarschijnlijkheid wordt zichtbaar gedomineerd door de lange-afstandsoscillatie met een amplitude (zie tabel 1 in de bijlage) van ongeveer 0.43.

De amplitude van de korte-afstandsoscillatie is veel kleiner; deze varieert tussen ongeveer $2 \cdot 10^{-3}$ en $6 \cdot 10^{-3}$. Daardoor is de korte-afstandsoscillatie alleen zichtbaar als kleine bultjes en deukjes in de lange-afstandsoscillatie. De amplitudezweving is nog net zichtbaar door de grootte van de bultjes in het maximum van de lange-afstandsoscillatie te vergelijken met die in het minimum.

De andere twee lijnen in fig. 4 geven de waarschijnlijkheden weer om respectievelijk een muon- of een tau-neutrino te meten als functie van de afstand tot de bron. In beide grafieken is de korte-afstandsoscillatie duidelijk zichtbaar.



(a)



(b)

Figuur 4: Waarschijnlijkheid om een e - (blauw), μ - (groen) of τ -neutrino (rood) te meten als functie van de afstand tot de bron voor een initieel e -neutrino met een energie van 18.6 keV.

a) overzicht

b) close-up van linkerbovenhoek van a

Gebuchte parameters: $\theta_{12} = 33.9^\circ$, $\theta_{13} = 3.2^\circ$, $\theta_{23} = 45^\circ$, $\Delta m_{21}^2 = 8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}^2}{c^4} = \frac{1}{30} |\Delta m_{31}^2| = \frac{1}{29} |\Delta m_{32}^2|$.

5.2 Decoherentie voor een algemeen golfpakket

In de vorige subsectie hebben we gekeken naar neutrino-oscillaties onder de aanname dat het golfpakket volledig coherent is d.w.z. de ruimtelijke integraal over de overlapfuncties is één. In het algemeen neemt deze integraal echter af in de tijd. Dit hebben we expliciet gezien voor gaussische golfpakketten en is in het algemene geval te begrijpen als gevolg van de verschillende groepsnelheden bij de massa-eigentoestanden. Algemeen gesproken verwachten we dat decoherentie een rol gaat spelen zodra de onderlinge afstand tussen twee massa-eigentoestand golfpakketjes (gegeven door $v_k t - v_r t$) van de orde wordt van de typische breedte σ_x van een van de golfpakketjes.

In termen van verg. 12 betekent dit dat de oscillerende termen in de tweede som uitdempen na verloop van tijd totdat alleen de constante termen overblijven.

5.3 Lokalisatieconditie voor een algemeen golfpakket

In Sectie 5.1.2 nam ik aan dat ik in verg. 19 de oscillatiefase buiten de integraal mocht halen. Dit mag wanneer de overlapgolfpakketten een ruimtelijke spreiding hebben die veel kleiner is dan de oscillatielengten. Dit is nu de definitie van de lokalisatieconditie. Wanneer deze niet geldt wordt de integraal over de overlapterm onderdrukt door de sterk oscillerende fase. Het resultaat is een minder sterke neutrino-oscillatie. De mate van onderdrukking hangt af van de specifieke vorm van het golfpakket. In het algemeen zal de oscillatie niet of nauwelijks onderdrukt worden wanneer

$$L_{\text{osc}} \geq \mathcal{O}(\sigma_x)$$

waarbij σ_x de spreiding (plaatsonzekerheid) van het golfpakket is. De lokalisatieconditie zal een cruciale rol blijken te spelen in het volgende hoofdstuk.

6 Het Mößbauer neutrino experiment

Als toepassing van de bovenstaande theorie kijk ik naar het Mößbauer neutrino experiment. Ik zal eerst de experimentele opzet uitleggen en dan een theoretisch probleem bespreken in de context van het voorgaande.

6.1 Resonantie

Neutrino's zijn notoir moeilijk te detecteren omdat ze nauwelijks interactie hebben met materie. De lage botsingsdoorsnede wordt in de praktijk gecompenseerd door gigantische hoeveelheden detectormateriaal te gebruiken.

Het is theoretisch mogelijk om een grote reactiedoorsnede te bewerkstelligen door neutrino's in te vangen die exact de resonante energie hebben voor de in-vangreactie. Dit is een van de centrale ideeën achter het Mößbauer neutrino

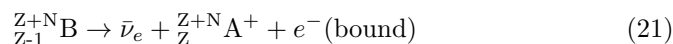
experiment. Het reactietype is



waarbij een elektron-antineutrino de invanging induceert van een elektron in een element met atoomgetal Z en N neutronen. Deze reactie is resonant als het elektron antineutrino precies de juiste energie heeft.

6.2 Neutrinobron

Elektron antineutrino's met de juiste kinetische energie zouden verkregen kunnen worden uit de omgekeerde reactie: gebonden β -verval. Dat wil zeggen β -verval waarbij het ontstane elektron ingevangen wordt in een gebonden baan rond het atoom:



Dit invangen van het elektron gebeurt slechts in een kleine fractie van de β -vervalsprocessen.

Het elektron antineutrino dat ontstaat bij reactie 21 zou exact de juiste energie hebben om resonant ingevangen te worden door middel van het proces bij 20, ware het niet dat impulsbehoud vereist dat bij beide processen een deel van de reactie-energie aan het zware atoom overgedragen wordt. Deze terugslagenergie is slechts klein (door het enorme massaverschil) maar voldoende om de kinetische energie van het neutrino buiten het resonante gebied te brengen. Het is mogelijk om dit probleem te omzeilen door middel van het Mößbauer effect.

6.3 Mößbauer effect

Wanneer een atoom ingebed is in een rooster wordt de terugslagenergie E_R van een deeltjesverval aan het rooster overgedragen in de vorm van fononen. Door kwantumeffecten wordt er door een fractie van de vervallen *geen fononen* aangeslagen, d.w.z. er is *geen terugslagenergie*. Dit effect is vernoemd naar R. Mößbauer die het ontdekte bij de emissie en absorptie van gammastraling door atomen ingebed in een rooster.

Het Mößbauer effect kan ook een rol spelen bij elektron-antineutrino's die ontstaan bij gebonden β -verval in een rooster. Als er bij het verval geen fononen aangeslagen worden dan krijgt het antineutrino precies de juiste energie die we nodig hebben.

We kunnen theoretisch een rooster maken waarin atomen van element A zijn ingebed die d.m.v β -verval elektron antineutrino's uitzenden. Een deel van deze neutrino's heeft precies de vereiste resonante energie om ingevangen te worden d.m.v omgekeerd β -verval. Als we een vrijwel identiek rooster kunnen maken waarin atomen van type B ingebed zijn zou dat kunnen dienen als detector.

6.4 Praktische problemen

Het Mößbauer experiment is theoretisch veelbelovend maar technisch moeilijk uitvoerbaar. Als het ooit uitgevoerd zou worden zijn er legio problemen die eerst overwonnen moeten worden.

Zo wordt de lijnbreedte (energiespreiding) van het β -verval groter door o.a. Dopplerverschuiving en materiaaleffecten. Dit zorgt ervoor dat het energiespectrum van de neutrino's minder overlap vertoont met de resonante energiepiek van de detectiereactie. Het secuur inbedden van atomen in een rooster is een technische uitdaging. Verder is de neutrinoflux met β -verval als bron heel laag in vergelijking met conventionele bronnen (kernreactoren, de zon of kosmische straling) en de effectieve flux wordt nog verminderd doordat alleen vervallen bijdragen waarbij er zowel geen terugslag is én het elektron ingevangen wordt.

Over de technische haalbaarheid van dit experiment zal ik geen harde uitspraken doen. Het is echter niet te verwachten dat het binnen de voorzienbare toekomst gerealiseerd zal worden. Ik bespreek het Mößbauer neutrino experiment hier vooral omdat het interessant is vanuit een theoretisch perspectief.

6.5 Theoretische uitwerking

In de literatuur wordt meestal gesproken over een systeem met ingebed tritium als neutrinobron en ingebed helium-3 als detectiemateriaal. De β -vervalsenergie van tritium is 18.6 keV ([2]). De oscillatiewaarschijnlijkheid voor neutrino's met deze energie is weergegeven in figuur 4. De oscillatielengten behorende bij deze energie zijn

$$L_{21}^{osc} \approx 5.8 \cdot 10^2 m$$

$$L_{32}^{osc} = L_{31}^{osc} \approx 20 m$$

Een meting van neutrino-oscillaties over zulke korte afstanden is natuurlijk een enorm aantrekkelijk vooruitzicht voor experimentatoren.

6.6 Wel of geen oscillaties?

Het voorgestelde Mößbauer experiment ontketende een felle discussie tussen Bilenky en Akhmedov ([3], [4], [5]) over de vraag of Mößbauer neutrino's oscilleren. De vraag rees of neutrino-oscillaties wel mogelijk waren wanneer de energie en impuls zo scherp bepaald zijn als bij dit experiment.

Omdat we te maken hebben met een tweedeeltjesverval zijn de energie en impuls van het neutrino te berekenen d.m.v. energiebehoud en impulsbehoud. Het is dan in principe ook mogelijk om de massa uit te rekenen. Het neutrino kan dan natuurlijk onmogelijk oscilleren tussen verschillende massatoestanden.

In Sectie 5.3 hebben we gezien dat neutrino-oscillaties onderdrukt kunnen wor-

den wanneer niet aan de lokalisatieconditie is voldaan. Als we het geval beschouwen waarin de energie *exact* bepaald is reduceert de complexe fase tot

$$\Delta\phi_{kr}(\vec{x}, t) \rightarrow \phi_{kr}(\vec{x}) \equiv -\frac{1}{\hbar}\Delta\vec{p}_{kr} \cdot \vec{x}$$

Ter herinnering: neutrino-oscillaties worden onderdrukt wanneer deze fase significant verandert binnen de typische afmeting σ_x van het golfpakket. De oscillatie wordt dus deels onderdrukt wanneer

$$\frac{2\pi\hbar}{|\Delta\vec{p}_{kr}|} < \sigma_x$$

Dit kan (weer onder de voorwaarde $\Delta E_{kr} = 0$) geschreven worden als

$$L_{kr}^{\text{osc}} < \sigma_x \quad (22)$$

Oscillatie is niet meer mogelijk wanneer het golfpakket *veel groter* is dan de oscillatielengte. Zoals we hebben gezien zijn de oscillatielengten macroscopisch groot, bijvoorbeeld 20m voor het tritium/helium-3 systeem. Intuïtief verwachten we dat een neutrinogolfpakketje een plaatsonzekerheid zal hebben in de grootte-orde van die van het bronatoom; zeker geen macroscopische afmetingen. Dit is een eerste aanwijzing dat neutrino oscillaties in een realistisch experiment niet onderdrukt zullen worden.

We kunnen het probleem ook anders benaderen. Zoals in [2] besproken wordt is er een minimale impulsresolutie nodig om verschillende massa-eigentoestanden te kunnen onderscheiden. In het limietgeval dat de energie van het neutrino exact bepaald is heeft het neutrino drie impulseigentoestanden (een voor elke massa-eigentoestand) met eigenwaarden $p_k \approx \frac{E}{c} - \frac{m_k^2 c^3}{2E}$. Om de verschillende massa-eigentoestanden te kunnen onderscheiden moet de impuls van het neutrino dus bepaald zijn met een onzekerheid die kleiner is dan de verschillen tussen de drie p_k 's. Dus we eisen

$$\sigma_p < \Delta p_{\text{max}}$$

waar Δp_{max} het grootste verschil tussen de drie impulsen aangeeft. Deze verschillen kunnen we (nog steeds onder de aanname van gelijke energieën) schrijven als

$$\Delta p_{kr} = \frac{2\pi\hbar}{L_{kr}^{\text{osc}}}$$

Hieruit volgt in het bijzonder dat Δp_{max} geschreven kan worden in termen van de korte oscillatie-afstand L_S :

$$\Delta p_{\text{max}} = \frac{2\pi\hbar}{L_S}$$

De impulsonzekerheid van het neutrino en die van het bronatoom zijn gelijk.

Met gebruik van de Heisenberg onzekerheidsrelatie en bovenstaande vergelijkingen kunnen we nu een ondergrens afleiden aan de plaatsonzekerheid van het bronatoom:

$$\sigma_x^{\text{atoom}} \geq \frac{\hbar}{2\sigma_p} \geq \frac{L_S}{4\pi}$$

Het bronatoom zou dus een plaatsonzekerheid moeten hebben in de orde van de macroscopische oscillatie-afstanden. In werkelijkheid weten we dat het bronatoom zich binnen een beperkt volume (een stuk bronmateriaal van enkele centimeters groot) bevindt; het is in principe zelfs mogelijk om de precieze roosterpositie van het atoom te bepalen. De plaatsonzekerheid van het bronatoom kan dus nooit groot genoeg zijn om de oscillatie te kunnen verstoren. Dus, zelfs in een geïdealiseerd Mößbauer experiment met perfecte energieresolutie is het onmogelijk om individuele massa-eigentoestanden te onderscheiden.

Mößbauer neutrino's oscilleren dus wel.

7 Conclusies

In deze scriptie heb ik een overzicht gegeven van de theoretische behandeling van neutrino-oscillaties in termen van golfpakketten en dit toegepast op Mößbauer neutrino's. Verder heb ik een - hopelijk enigszins intuïtieve - interpretatie van de oscillatieformules gepresenteerd.

Afsluitend wil ik graag opmerken dat de quantummechanische beschrijving van neutrino-oscillaties niet volledig is (zie [11]). Een completere beschrijving is vermoedelijk beschikbaar binnen het framework van de quantumveldentheorie. Helaas lag dit tijdens mijn onderzoek nog niet binnen mijn voorkennis. De beschrijving die hier gegeven is, is in ieder geval wel intuïtief en begrijpelijk en vervult op die manier een nuttige rol.

Mijn hoop is dat er in de komende jaren veel vooruitgang geboekt zal worden in de theoretische behandeling van neutrino-oscillaties. De oorsprong van neutrinomassa's is nog altijd een mysterie en de oscillatieparameters zijn nog niet theoretisch voorspelbaar. Als een van de 'losse eindjes' rondom het Standardmodel ligt in neutrino-oscillaties mogelijk de sleutel naar nieuwe inzichten binnen de deeltjesfysica.

Tenslotte zou ik graag mijn begeleider Wim Beenakker willen bedanken voor de begeleiding gedurende het afgelopen jaar en de gelegenheid stage te lopen bij de afdeling Theoretische Hoge-Energie Fysica van IMAPP.

A Bijlagen

A.1 Normalisatie van de Fourier-transformatie

In mijn afleiding maak ik gebruik van een Fourier-transformatie om een impulsverdeling $f(\vec{p} - \vec{p}_0)$ om te zetten in een golffunctie $\psi(\vec{x}, t)$ in de plaatsrepresentatie. Hier zal ik laten zien hoe de normalisatie van $f(\vec{p} - \vec{p}_0)$ automatisch leidt tot de normalisatie van $\psi(x, t)$.

Ik wil graag dat

$$\int d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2 = 1$$

waarbij de golffunctie $\psi(\vec{x}, t)$ gegeven wordt door

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(\vec{p} - \vec{p}_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar - iE(p)t/\hbar}$$

Invullen levert

$$\int d^3x \left| \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(\vec{p} - \vec{p}_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar - iE(p)t/\hbar} \right|^2$$

Dit kunnen we uitschrijven als

$$\int d^3x \int \frac{d^3p d^3\rho}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{p} - \vec{p}_0) f^*(\vec{\rho} - \vec{p}_0) e^{i[\vec{p}-\vec{\rho}]\cdot\vec{x}/\hbar - i[E(p)-E(\rho)]t/\hbar}$$

We integreren eerst over \vec{x} , en maken hierbij gebruik van de identiteit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \vec{x}\cdot\vec{\xi}} d^3\xi = \delta(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{p}-\vec{\rho})\cdot\vec{x}/\hbar} d^3x = (2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p} - \vec{\rho})$$

zodat we vinden

$$\int d^3p d^3\rho f(\vec{p} - \vec{p}_0) f^*(\vec{\rho} - \vec{p}_0) \delta(\vec{p} - \vec{\rho}) e^{-i[E(p)-E(\rho)]t/\hbar}$$

wat gelijk is aan

$$\int d^3p |f(\vec{p} - \vec{p}_0)|^2$$

Conclusie: de golffunctie heeft dezelfde normalisatie als de impulsverdelingsfunctie.

Uit vergelijking 9 volgt dat de golffunctie gedefiniëerd is als een fasefactor maal de vormfactor. Hieruit volgt direct dat de vormfactor ook genormaliseerd is.

A.2 Oscillatie-amplitudes in termen van menghoeken

De tabel hieronder bevat de oscillatie-amplitudes voor de overgang van een neutrino met initiële flavour a naar een neutrino met flavour b . De amplitude voor de lange-afstandsoscillatie (zie 5.1.2) is $2|U_{ab12}|$; de amplitude van de korte-afstandsoscillatie vertoont een zweving tussen de som en het verschil van $2|U_{ab13}|$ en $2|U_{ab23}|$.

De numerieke waarden zijn berekend met $\theta_{13} = 3.2^\circ$, $\theta_{12} = 33.9^\circ$, $\theta_{23} = 45^\circ$ en $\delta = 0$.

Tabel 1: formules en geschatte waarden voor oscillatie-amplitudes

Oscillatie	Oscillatie-amplitudes, uitgedrukt in...		
	pmns-matrixelementen	menghoeken	numeriek
$\nu_e \rightarrow \nu_e$	$2 U_{ee12} $	$2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2$	0.43
	$2 U_{ee13} $	$2c_{13}^2 c_{12}^2 s_{13}^2$	0.0043
	$2 U_{ee23} $	$2c_{13}^2 s_{12}^2 s_{13}^2$	0.0019
$\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$	$2 U_{\mu\mu12} $	$2c_{23}^4 s_{12}^2 c_{12}^2 \dagger$	0.12
	$2 U_{\mu\mu13} $	$2c_{23}^2 s_{12}^2 s_{23}^2 \dagger$	0.18
	$2 U_{\mu\mu23} $	$2c_{23}^2 c_{12}^2 s_{23}^2 \dagger$	0.32
$\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau$	$2 U_{\tau\tau12} $	$2s_{23}^4 s_{12}^2 c_{12}^2 \dagger$	0.10
	$2 U_{\tau\tau13} $	$2c_{23}^2 s_{12}^2 s_{23}^2 \dagger$	0.13
	$2 U_{\tau\tau23} $	$2c_{23}^2 c_{12}^2 s_{23}^2 \dagger$	0.37
$\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$	$2 U_{\mu\tau12} $	$2c_{23}^2 s_{12}^2 s_{23}^2 c_{12}^2 \dagger$	0.11
	$2 U_{\mu\tau13} $	$2c_{23}^2 s_{12}^2 s_{23}^2 \dagger$	0.15
	$2 U_{\mu\tau23} $	$2c_{23}^2 c_{12}^2 s_{23}^2 \dagger$	0.34

\dagger : dit is een benadering onder de aanname $\theta_{13} = 0$. De afwijking van de daadwerkelijke waarde is minder dan 20%. De numerieke waarden zijn berekend zonder deze benadering te gebruiken.

In de benadering $\theta_{13} = 0$ valt δ weg uit de PMNS-matrix. Zonder deze benadering speelt δ echter weldegelijk een (kleine) rol; hij beïnvloedt de oscillatie-amplitudes én veroorzaakt een onderlinge faseverschuiving tussen de oscillaties.

A.3 Gemeten waarden van mixing parameters

Deze waarden zijn afkomstig van [10].

$$\begin{aligned}\sin^2(2\theta_{12}) &= 0.87 \pm 0.03 \\ \Rightarrow \theta_{12} &\approx 34.4^\circ \\ \sin^2(2\theta_{23}) &> 0.92, \text{ CL} = 90\% \\ \Rightarrow \theta_{23} &= (45 \pm 8.2)^\circ \\ \sin^2(2\theta_{13}) &< 0.15, \text{ CL} = 90\% \\ \Rightarrow \theta_{13} &< 11.4^\circ \\ \Delta m_{21}^2 &= (7.59 \pm 0.20) \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2/c^4 \\ |\Delta m_{32}^2| &= (2.43 \pm 0.13) \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2/c^4\end{aligned}$$

Referenties

- [1] E. Kh. Akhmedov, A. Yu. Smirnov, “Paradoxes of neutrino oscillations”, Phys. Atom. Nucl. 72, 1363 (2009) [arXiv:0905.1903 [hep-ph]]
- [2] E. Kh. Akhmedov, J. Kopp, M. Lindner, “Oscillations of Mößbauer neutrinos”, JHEP 0805, 005 (2008) [arXiv:0802.2513 [hep-ph]]
- [3] S.M. Bilenky, F. von Feilitzsch, W. Potzel, “Time-energy uncertainty relations for neutrino oscillations and the Mößbauer neutrino experiment”, J. Phys. G35, 095003 (2008) [arXiv:0803.0527 [hep-ph]]
- [4] E. Kh. Akhmedov, J. Kopp, M. Lindner, “Comment on ’Time-energy uncertainty relations for neutrino oscillations and the Mößbauer neutrino experiment’”, J. Phys. G36, 078001 (2009) [arXiv:0803.1424 [hep-ph]]
- [5] S.M. Bilenky, F. von Feilitzsch, W. Potzel, “Different schemes of neutrino oscillations in Mößbauer neutrino experiment”, [arXiv:0804.3409 [hep-ph]]
- [6] John N. Bahcall, “Theory of Bound-State Beta Decay”, Phys. Rev. 124, 495 (1961)
- [7] R.G.C. Oldeman, M. Meloni, B. Saitta, “Resonant antineutrino induced electron capture with low energy bound-beta beams”, Eur. Phys. J. C65, 81 (2010) [arXiv:0905.1029 [hep-ph]]
- [8] R. S. Raghavan, “Recoilless Resonant Capture of Antineutrinos from Tritium Decay”(2006) [arXiv:hep-ph/0601079v3]
- [9] C. Giunti, C.W. Kim, “Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach”, Phys. Rev. D58, 017301 (1998) [hep-ph/9711363]

- [10] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *J. Phys.* G37, 075021 (2010)
(URL: <http://pdg.lbl.gov>)
- [11] E. Kh. Akhmedov, J. Kopp, “Neutrino Oscillations: Quantum Mechanics vs. quantum field theory”, *JHEP* 1004, 008 (2010) [arXiv:1001.4815 [hep-ph]]