

De eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede
van het proces $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$

Susanne Lepoeter

versie 29 augustus 2011

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Supersymmetrie	4
2.1	Het standaardmodel	4
2.1.1	De materiedeeltjes	4
2.1.2	De natuurkrachten en hun deeltjes	5
2.1.3	Problemen met het standaardmodel	6
2.2	Wat is supersymmetrie?	7
2.2.1	Supersymmetrie in het algemeen	7
2.2.2	Supersymmetrie en deeltjesversnellers	9
3	De botsingsdoorsnede	10
3.1	Wat is de botsingsdoorsnede?	10
3.2	De botsingsdoorsnede als machtreeks	14
3.3	De machtreeks bij de kinematische drempel	17
4	De berekening	19
4.1	Kinematica	19
4.1.1	Inleiding in de relativistische kinematica	19
4.1.2	Mandelstamvariabelen bij de kinematische drempel	21
4.1.3	De botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel	23
4.2	Het uitrekenen van $ \mathcal{M} ^2$	23
4.2.1	De Mandelstamvariabelen in $ \mathcal{M} ^2$	24
4.2.2	De integralen in $ \mathcal{M} ^2$	25
4.3	Het uitrekenen van de botsingsdoorsnede	31
5	Het verifiëren van de resultaten	33
6	Resultaten	35
7	Conclusie	37
8	Referenties	38
9	Bijlagen	39
9.1	De expansies van de Mandelstamvariabelen in β_g	39
9.2	De uitwerking van de integralen	40
9.3	Vereenvoudigingen	44

1 Inleiding

In de 20^e eeuw zijn wetenschappers steeds dieper doorgedrongen tot de kern van materie. Hierbij zijn veel nieuwe deeltjes ontdekt. De meest fundamentele deeltjes kunnen worden weergegeven in het standaardmodel. Dit standaardmodel kan veel verklaren, maar niet alles. Om meer verschijnselen in de natuur te kunnen verklaren, zijn er uitbreidingen bedacht op het standaardmodel. Een mogelijke uitbreiding op het standaardmodel is supersymmetrie.

Supersymmetrie voorspelt het bestaan van nieuwe deeltjes, die supersymmetrische deeltjes genoemd worden. Er wordt veel onderzoek gedaan naar supersymmetrie. In deeltjesversnellers worden deeltjes op elkaar gebotst in de hoop dat er supersymmetrische deeltjes geproduceerd worden. Er zijn echter tot nu toe geen supersymmetrische deeltjes waargenomen.

Om te weten bij welke energieën supersymmetrische deeltjes geproduceerd worden, is het belangrijk goede theoretische voorspellingen te hebben. Het doel van deze scriptie is het verbeteren van theoretische voorspellingen voor de botsingsdoorsnede, een grootheid die belangrijk is bij botsingen tussen deeltjes. Dit wordt gedaan voor het botsingsproces met een quark en een antiquark in de begintoestand en twee gluino's, de supersymmetrische partners van het gluon, in de eindtoestand.

Eerst wordt in hoofdstuk 2 ingegaan op supersymmetrie. Vervolgens wordt in hoofdstuk 3 de botsingsdoorsnede geïntroduceerd. In hoofdstuk 4 wordt dieper ingegaan op de berekening en in hoofdstuk 5 wordt gecontroleerd of de uiteindelijke uitdrukking voor de botsingsdoorsnede klopt. De resultaten van de berekening zijn terug te vinden in hoofdstuk 6.

2 Supersymmetrie

Supersymmetrie is een theorie die een uitbreiding is op het standaardmodel uit de deeltjesfysica. Daarom is het handig om eerst naar het standaardmodel te kijken, voordat er op supersymmetrie kan worden ingegaan.

2.1 Het standaardmodel

Het standaardmodel is een model dat goed in overeenstemming is met de kwantummechanica en de speciale relativiteitstheorie. Het beschrijft de tot nu toe bekende deeltjes en hun niet-gravitatiele interacties. Elk deeltje in het standaardmodel is een elementair deeltje. Dat betekent dat de deeltjes niet verder kunnen worden onderverdeeld in kleinere deeltjes. Het standaardmodel kan worden opgedeeld in twee soorten deeltjes: materiedeeltjes en deeltjes die krachten overbrengen. Daarnaast is bekend dat er ook antimaterie bestaat. Elk deeltje in het standaardmodel heeft een antideeltje met bijna dezelfde eigenschappen, behalve dat de lading¹ van het antideeltje tegengesteld is. In sommige gevallen is een deeltje zijn eigen antideeltje. Dit is bijvoorbeeld het geval bij het foton (zie 2.1.2).

2.1.1 De materiedeeltjes

De elementaire materiedeeltjes in het standaardmodel zijn quarks en leptonen. Moleculen bestaan namelijk uit atomen en atomen bestaan uit een kern met een positieve elektrische lading en elektronen met een negatieve elektrische lading. De kern bestaat uit protonen met een positieve elektrische lading en neutronen die elektrisch neutraal zijn. Tenslotte bestaan protonen en neutronen uit quarks en gluonen. Het gluon is verantwoordelijk voor de sterke wisselwerking (zie 2.1.2).

De elementaire materiedeeltjes kunnen worden verdeeld in drie families. In de opeenvolgende families worden de deeltjes steeds zwaarder. Elke familie bestaat uit twee quarks en twee leptonen. De leptonen bestaan uit elektronen (en natuurlijk uit de twee zwaardere versies van het elektron: het muon en het tau-deeltje) en de bijbehorende neutrino's. Neutrino's zijn elektrisch neutrale deeltjes die weinig interactie hebben met de rest van de materiedeeltjes. Ze zijn ontdekt doordat bij het verval van radioactieve deeltjes de wet van behoud van impuls niet helemaal bleek te kloppen. De verklaring was dat er een deeltje moest zijn dat de resterende impuls zou hebben.

Naast de leptonen zijn er tot nu toe zes verschillende soorten quarks bekend. Ze hebben een lading die $-1/3$ of $+2/3$ van de lading van het proton is. Naast gluonen bestaat het proton uit twee up-quarks en een down-quark. Een neutron bestaat uit gluonen, twee down-quarks en een up-quark. Alle quarks en leptonen hebben de eigenschap dat ze een halftallige spin hebben: ze zijn dus fermionen.

¹Lading moet hier in algemene zin worden opgevat, dus niet alleen als elektrische lading.

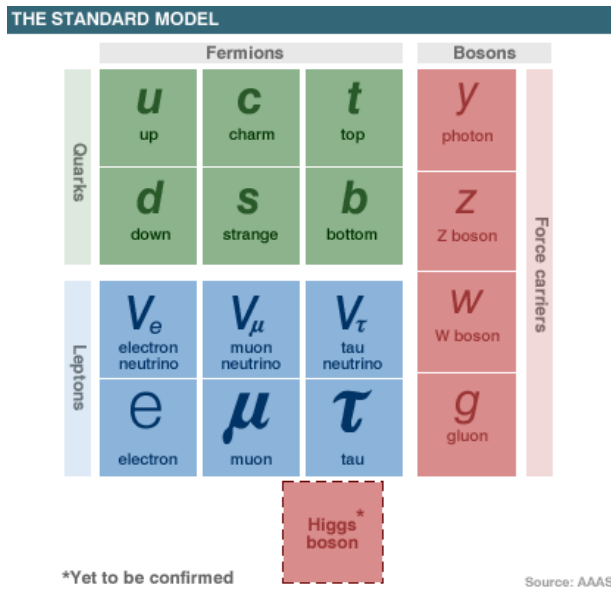
Verder hebben quarks nog een extra eigenschap, namelijk kleur. Deze eigenschap is ontdekt toen men erachter kwam dat er een deeltje (het Δ^{++} -baryon) is dat bestaat uit drie up-quarks. Dit was echter niet in overeenstemming met het principe van Pauli. Dit principe zegt namelijk dat de up-quarks in het Δ^{++} -baryon allemaal in een verschillende kwantumtoestand moeten zitten. Vanuit de kwantummechanica was dat niet mogelijk. Daarom werd de eigenschap kleur geïntroduceerd. Kleur kan drie waarden aannemen: rood, blauw en groen (en er zijn ook antikleuren: antirood, antiblaauw en antigroen). Een combinatie van evenveel rood, groen en blauw wordt ook wel wit of kleurneutraal genoemd.

2.1.2 De natuurkrachten en hun deeltjes

Naast de materiedeeltjes zijn er in het standaardmodel ook deeltjes die verantwoordelijk zijn voor het overbrengen van de natuurkrachten. Deze deeltjes hebben een heeltallige spin en zijn dus bosonen:

- Het gluon is een elektrisch neutraal en massaloos deeltje dat koppelt aan deeltjes die een kleurlading hebben (quarks en combinaties van quarks). Het gluon is verantwoordelijk voor de sterke kernkracht. Die kracht zorgt bijvoorbeeld voor het bij elkaar blijven van quarks in een proton. Een gluon transporteert kleurlading van de ene quark naar de andere quark. Omdat er behoud van kleurlading moet zijn, heeft een gluon zowel een kleur als een antikleur. Hieruit volgt dat een gluon kleurlading heeft en dat gluonen dus ook aan elkaar koppelen.
- Het foton is een massaloos en elektrisch neutraal deeltje. Dit deeltje is verantwoordelijk voor de elektromagnetische wisselwerking. Een foton koppelt aan alle deeltjes die een elektrische lading hebben. Daardoor is het mogelijk dat bijvoorbeeld een deeltje en zijn antideeltje annihileren. Dat betekent dat de twee deeltjes verdwijnen en er een foton voor in de plaats komt.
- De W- en Z-deeltjes zijn verantwoordelijk voor de zwakke kernkracht. Deze deeltjes zijn in tegenstelling tot het foton en het gluon niet massaloos. Het Z-deeltje is elektrisch neutraal, terwijl het W-deeltje een elektrische lading heeft. De zwakke kernkracht zorgt bijvoorbeeld voor bètaverval (dat is het overgaan van een neutron in een proton onder uitzending van een elektron). Het is de enige kracht die ervoor kan zorgen dat verschillende soorten (smaken) quarks in elkaar over kunnen gaan.

Verder is het Higgs-mechanisme bedacht om te verklaren waarom bepaalde deeltjes massa hebben en andere deeltjes niet. Dit mechanisme zegt dat er een Higgs-veld is dat ervoor zorgt dat deeltjes massa krijgen. De deeltjes krijgen hun massa door hun koppeling aan dit veld. Ook geeft het Higgs-veld aanleiding tot een nieuw deeltje: het Higgs-boson. Er zijn op dit moment volop onderzoeken gaande om het Higgs-boson experimenteel aan te tonen.



Figuur 1: De deeltjes van het standaardmodel

2.1.3 Problemen met het standaardmodel

Het standaardmodel kan veel dingen verklaren en is ook experimenteel onderzocht in deeltjesversnellers. Daaruit blijkt dat het standaardmodel prima werkt, maar dat er toch een aantal problemen zijn. Ten eerste is er het probleem met de zwaartekracht. Het graviton zou verantwoordelijk zijn voor deze kracht. Dit deeltje, dat elektrisch neutraal en massaloos zou moeten zijn, is echter nog niet waargenomen. Op zich zou dat geen probleem hoeven te zijn, omdat de zwaartekracht zo zwak is. Het grootste probleem met de zwaartekracht is dat het moeilijk in overeenstemming gebracht kan worden met het standaardmodel. Dat heeft verschillende redenen, maar die zijn niet relevant voor het onderzoek waar het hier over gaat.

Verder is er het probleem van donkere materie in het universum. Het blijkt dat ongeveer 17% van de materie in het universum de “gewone” materie is zoals we die kennen [1]. De rest is een ander soort materie, bestaande uit andere soorten deeltjes dan die we tot nu toe kennen. Er zijn nog meer problemen met het standaardmodel, maar deze zijn theoretisch wat lastiger. De bovenstaande problemen suggereren al dat het standaardmodel op z'n minst uitgebreid moet worden om deze problemen op te lossen.

2.2 Wat is supersymmetrie?

Supersymmetrie is een theorie die een symmetrie tussen bosonen en fermionen veronderstelt. Die symmetrie werd voor het eerst geopperd door Hironari Miyazawa in 1966 [2]. Later werd deze symmetrie toegepast op de deeltjes van het standaardmodel. Die theorie is bekend geworden onder de naam supersymmetrie.

2.2.1 Supersymmetrie in het algemeen

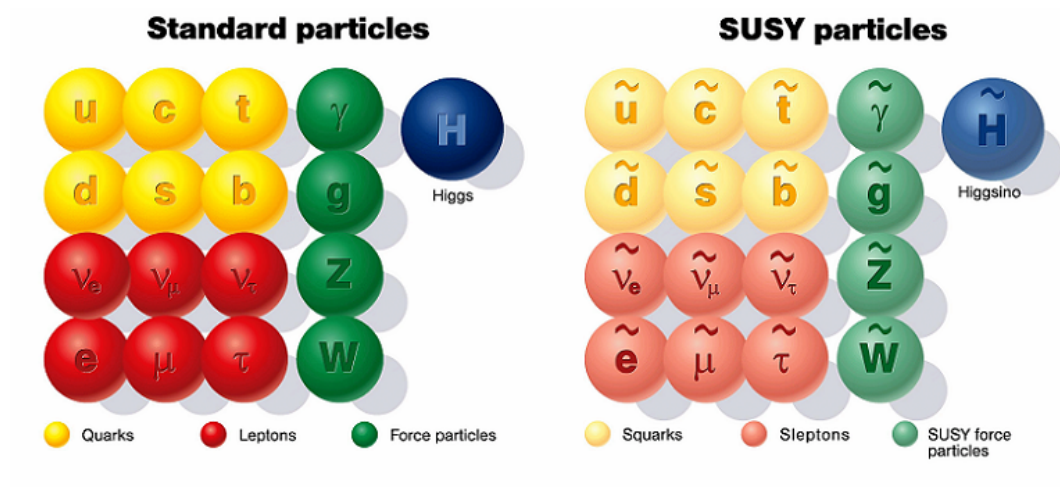
Supersymmetrie houdt in dat elke deeltje in het standaardmodel een supersymmetrische partner (of kortweg superpartner) heeft. Deze superpartner heeft een spin die een halftallige waarde verschilt van de spin van het oorspronkelijke deeltje. Daardoor zijn de superpartners van fermionen bosonen en omgekeerd. Verder geldt dat de meeste kwantumgetallen van de superpartners gelijk zijn aan de kwantumgetallen van de oorspronkelijke standaardmodeldeeltjes. Ook geldt dat de superpartners met dezelfde koppeling interageren als de deeltjes in het standaardmodel.

Een kwantumgetal dat echter verschillend is voor standaardmodeldeeltjes en supersymmetrische deeltjes, is R-pariteit. Dit is een kwantumgetal dat voor standaardmodeldeeltjes de waarde $+1$ en voor supersymmetrische deeltjes de waarde -1 aanneemt [3]. In de meeste supersymmetrische theorieën geldt dat R-pariteit behouden is. Daaruit volgt dat er altijd een even aantal supersymmetrische deeltjes geproduceerd moet worden uit standaardmodeldeeltjes. Ook betekent dat dat een supersymmetrisch deeltje niet zomaar in standaardmodeldeeltjes kan vervallen.

De naamgeving van een supersymmetrisch deeltje heeft te maken met de partner van het deeltje in het standaardmodel. Als het oorspronkelijke deeltje een fermion is, krijgt de superpartner een voorvoegsel *s-* bij de naamgeving. Als het oorspronkelijke deeltje een boson is, krijgt de superpartner een achtervoegsel *-ino*. De supersymmetrische partners van de quarks en leptonen zijn dus de squarks en de sleptonen. Verder zijn gluino, wino, zino, fotino en Higgsino de superpartners van het gluon, W-deeltje, Z-deeltje, foton en het Higgs-boson.

Oorspronkelijk werd er gedacht dat supersymmetrische deeltjes dezelfde massa zouden hebben als hun tegenhangers in het standaardmodel. Er zijn echter tot nu toe geen superpartners van de deeltjes uit het standaardmodel waargenomen. Dat suggereert dat als supersymmetrie bestaat, de deeltjes bij grotere energieën geproduceerd moeten worden. Aangezien massa en energie verband met elkaar houden, moeten supersymmetrische deeltjes dus een grotere massa hebben dan hun tegenhangers in het standaardmodel.

Daarom wordt supersymmetrie ook wel een gebroken symmetrie genoemd. De minimale uitbreiding van het standaardmodel wordt het minimale supersymmetrische standaardmodel genoemd.



Figuur 2: Het minimale supersymmetrische standaardmodel. Hierbij moet vermeld worden dat er eigenlijk vijf soorten Higgs-bosonen en vier soorten Higgsino's voorspeld worden.

Supersymmetrie zou een verklaring kunnen geven voor een aantal problemen met het standaardmodel, zoals het bestaan van donkere materie. Uit veel modellen blijkt namelijk dat het lichtste (elektrisch neutrale) supersymmetrische deeltje stabiel is en nauwelijks interageert met materie. Dit deeltje is een goede kandidaat voor donkere materie. Dat dit deeltje elektrisch neutraal moet zijn, volgt uit het feit dat de deeltjes die donkere materie vormen niet met fotonen mogen interageren. Als dat wel het geval zou zijn, hadden we donkere materie al waargenomen. Dat dit lichtste supersymmetrische deeltje stabiel is en niet vervalt naar standaardmodeldeeltjes, heeft te maken met behoud van R-pariteit (zoals aan het begin van deze paragraaf is uitgelegd).

2.2.2 Supersymmetrie en deeltjesversnellers

Er wordt in deeltjesversnellers veel onderzoek gedaan naar supersymmetrie, onder andere in de Large Hadron Collider in Genève. In deze versneller botsen protonen op elkaar bij hoge energieën. Deze energieën kunnen 3,5 TeV bedragen per bundel en de deeltjes kunnen een snelheid bereiken van 99,9999964% van de lichtsnelheid [4]. Men hoopt binnenkort protonen bij nog hogere energieën te laten botsen. De protonen interageren met elkaar door onder andere de sterke wisselwerking, omdat protonen uit quarks en gluonen bestaan (zie 2.1.1). Ook kunnen er gedurende korte tijd antiquarks gevormd worden als bijvoorbeeld een gluon vervalt naar een quark en een antiquark. Door middel van botsingen van protonen hoopt men supersymmetrische deeltjes te produceren en waar te nemen.

Om supersymmetrische deeltjes te vinden, wordt er vooral naar processen gekeken waar de sterke wisselwerking een rol speelt. Bij de sterke wisselwerking koppelen de deeltjes sterk aan elkaar (sterker dan bij de andere wisselwerkingen, vandaar de naam). Daardoor is de kans het grootst dat supersymmetrische deeltjes worden geproduceerd in een botsingsproces waarbij de sterke wisselwerking een rol speelt.

Het botsingsproces waar vanaf nu naar gekeken wordt, is het proces waarbij een quark en een antiquark op elkaar botsen en er een eindtoestand is van twee gluino's. In de hoofdstukken hierna zal dit proces gluinoproduktie genoemd worden. Natuurlijk kunnen er tussendoor nog andere deeltjes gevormd worden (zoals squarks). Dit zijn zogenaamde virtuele deeltjes, omdat ze maar op een korte tijdschaal bestaan en daarna vervallen. Omdat hier de sterke wisselwerking een rol speelt, is dit een goed proces om nader te onderzoeken als men supersymmetrische deeltjes wil produceren en waarnemen.

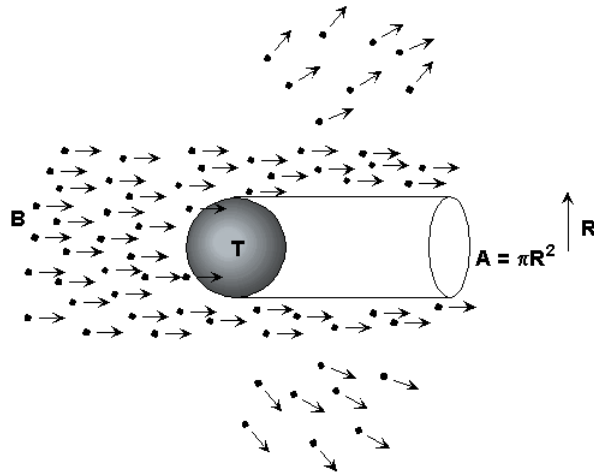
3 De botsingsdoorsnede

Zoals in paragraaf 2.2.2 is uitgelegd, worden in deeltjesversnellers botsingen tussen deeltjes bestudeerd. Men hoopt op deze manier supersymmetrische deeltjes te produceren en waar te nemen. Bij botsingen tussen deeltjes is de botsingsdoorsnede belangrijk. Dit wordt uitgelegd in paragraaf 3.1. Verder volgt uit paragraaf 3.2 dat de botsingsdoorsnede niet precies berekend kan worden, maar er is wel een mogelijkheid om de botsingsdoorsnede te benaderen. Tenslotte wordt in paragraaf 3.3 uitgelegd dat voor het onderzoek waar het hier over gaat de botsingsdoorsnede is benaderd bij de kinematische drempel.

3.1 Wat is de botsingsdoorsnede?

Bij botsingen tussen deeltjes worden de deeltjes verstrooid. De mate van verstrooiing wordt aangegeven door de botsingsdoorsnede σ . Om te kijken wat dit precies inhoudt, is het handig om een klassiek voorbeeld te bekijken.

Stel een bundel deeltjes botst op een vast verstrooiingscentrum. Dit verstrooiingscentrum kan bijvoorbeeld een bepaalde stof zijn die uit een heleboel atomen bestaat. Dit wordt het doel (in het Engels target) genoemd. In figuur 4 is dit voorbeeld schematisch weergegeven. In dit plaatje botst een bundel (B) deeltjes op een doel (T). Het doel heeft de vorm van een bol.



Figuur 3: Een schematische weergave van een bundel deeltjes die op een doel botst.

Op het oppervlak $A = \pi R^2$ (met R de straal van de slagschaduw van de bundel) interageren de bundeldeeltjes met de deeltjes van het doel. Hierbij worden de bundeldeeltjes verstrooid.

Dit oppervlak wordt de botsingsdoorsnede σ genoemd, waarbij de deeltjes van het doel effectief alle bundeldeeltjes verstrooien die invallen binnen een oppervlak σ .

De werkelijke situatie is iets gecompliceerder dan het voorgaande klassieke voorbeeld. Vanuit de kwantummechanica moet er namelijk rekening worden gehouden met het feit dat de deeltjes niet massief zijn en ook golfeigenschappen hebben. Ook moet er rekening worden gehouden met de onzekerheidsrelatie van Heisenberg. Deze onzekerheidsrelatie zegt dat de onzekerheid in de impuls loodrecht op de bewegingsrichting ($\Delta p'_T$) van een verstrooid deeltje moet voldoen aan

$$\Delta x_T \Delta p'_T \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

Hierbij is \hbar de (gereduceerde) constante van Planck en is Δx_T de onzekerheid in de lokalisatie van een deeltje loodrecht op de bewegingsrichting. Stel dat de bundeldeeltjes alleen interactie ondervinden binnen een afstand a van het doel en er elastische verstrooiing is. Als er verstrooiing optreedt, moet een bundeldeeltje dus gelokaliseerd zijn met een onzekerheid

$$\Delta x_T = \mathcal{O}(a) \quad (2)$$

Om iets over de verstrooiingshoek θ ten opzichte van de doorgaande richting te kunnen zeggen, kan er naar de verhouding

$$\begin{aligned} \frac{p'_T}{p} &= \frac{p'}{p} \sin \theta \\ &= \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

worden gekeken. Hierbij is $p = p'$ de (totale) impuls van een bundeldeeltje voor de verstrooiing, hetgeen gelijk is aan de impuls p' van een deeltje na de verstrooiing omdat er elastische verstrooiing is. Met behulp van vergelijkingen 1, 2 en 3 volgt voor de onzekerheid in de verstrooiingshoek θ :

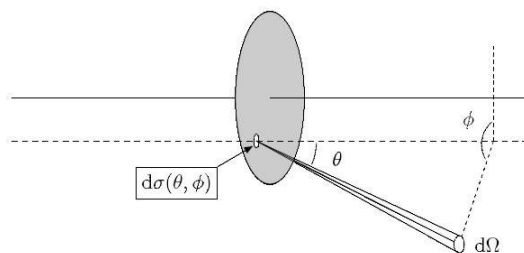
$$\begin{aligned} \Delta(\sin \theta) &= \Delta\left(\frac{p'_T}{p}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\hbar}{ap}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{a}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Hierbij geeft de grootte $\lambda = h/p$ de karakteristieke de Broglie-golflengte van een bundeldeeltje aan.

De conclusie die uit vergelijking 4 getrokken kan worden, is dat de de Broglie-golflengte van de bundeldeeltjes bepaalt wat de fysische lengteschaal oftewel het resolutievermogen is dat met een botsingsexperiment onderzocht kan worden. In het algemeen geldt dat voor $\lambda \ll a$ botsingen tussen deeltjes effectief als klassiek kunnen worden gezien en dat voor $\lambda = \mathcal{O}(a)$ kwantummechanische effecten een rol beginnen te spelen.

Het doel van de meeste botsingsexperimenten is de kleinst mogelijke lengteschalen te onderzoeken, namelijk $a = \mathcal{O}(\lambda)$. Bij deze lengteschalen spelen dus kwantummechanische effecten een rol. Hoe groter de energie van de inkomende deeltjes bij een botsing, hoe groter hun impuls en hoe kleiner hun karakteristieke de Broglie-golflengte. Dat betekent dat dan de kleinste lengteschalen onderzocht kunnen worden.

Om een uitdrukking voor de botsingsdoorsnede op te stellen, is het handig een ruimtehoek Ω te definiëren. Dit is te zien in figuur 4.



Figuur 4: De definitie van de ruimtehoek $d\Omega$

Hierbij is de totale botsingsdoorsnede te verkrijgen door te integreren over de differentiële werkzame doorsnede $d\sigma/d\Omega$. Hierbij kan de integraal over Ω opgesplitst worden in een integraal over een polaire hoek θ en een azimutale hoek ϕ :

$$\begin{aligned}\sigma_{tot} &= \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}\end{aligned}\quad (5)$$

In het algemeen hangt de differentiële werkzame doorsnede $d\sigma/d\Omega$ niet van de hoek ϕ af en geeft de integraal over deze hoek een bijdrage 2π . De differentiële werkzame doorsnede kan worden opgevat als de mate van verstrooiing in de Ω -richting per eenheid van ruimtehoek.

De botsingsdoorsnede hangt niet af van het referentiestelsel dat gekozen wordt. Als referentiestelsel kan bijvoorbeeld het massamiddelpuntstelsel worden gekozen. Bekijk nu het geval dat er twee inkomende deeltjes A en B en twee uitgaande deeltjes C en D zijn. Het massamiddelpuntstelsel is dan gedefinieerd als het stelsel waarin de impulsen van de inkomende deeltjes dezelfde grootte, maar tegengestelde richting hebben.

In het massamiddelpuntsstelsel geldt dus voor de impulsen \vec{p}_A en \vec{p}_B van de inkomende deeltjes A en B:

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B \quad (6)$$

En hieruit volgt vanwege impulsbehoud een verband tussen de impulsen \vec{p}_C en \vec{p}_D van de uitgaande deeltjes C en D, namelijk

$$\vec{p}_C = -\vec{p}_D \quad (7)$$

Voor dit geval geldt de volgende uitdrukking voor de differentiële werkzame doorsnede $d\sigma/d\Omega$ in termen van de energieën E_A en E_B van de inkomende deeltjes A en B [15]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 |\vec{p}_C|}{(E_A + E_B)^2 |\vec{p}_A|} \quad (8)$$

Hierbij is c de lichtsnelheid, \hbar de constante van Planck en S is een statistische factor die ervoor zorgt dat je niet dubbel telt in het geval van identieke deeltjes. Voor twee identieke deeltjes in de eindtoestand is deze factor $1/2$. De grootheid $|\mathcal{M}|^2$ is het kwadraat van de absolute waarde van het matrixelement \mathcal{M} . Het matrixelement kan worden opgevat worden als een overgangsamplitude (de waarschijnlijkheidsamplitude dat de inkomende deeltjes interageren en de deeltjes in de eindtoestand vormen). De grootheid $|\mathcal{M}|^2$ hangt af van de dynamica van een botsingsproces en bevat dus de dynamische informatie over een botsing.

Zoals eerder gezegd geldt dat bij een grote energie van de inkomende deeltjes de de Broglie-golflengte van de deeltjes klein is. De interactie is dan gevoelig voor kleine lengteschalen. Bij een nog grotere energie van de inkomende deeltjes wordt de de Broglie-golflengte van de deeltjes veel kleiner dan de relevante lengteschaal van de interactie. In dat geval treedt er destructieve interferentie op die ertoe leidt dat de botsingsdoorsnede een ordegrrootte heeft van [11]:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \equiv \mathcal{O}\left(\frac{\hbar^2}{|\vec{p}_A|^2}\right) \quad (9)$$

In de praktijk hebben de deeltjes in de begintoestand een verwaarloosbare massa. Voor een deeltje met een massa die effectief nul is, geldt dan dat de destructieve interferentie van $\mathcal{O}(\hbar^2/E^2)$ is (zie 4.1.1). Hierbij is E de energie van een inkomend deeltje.

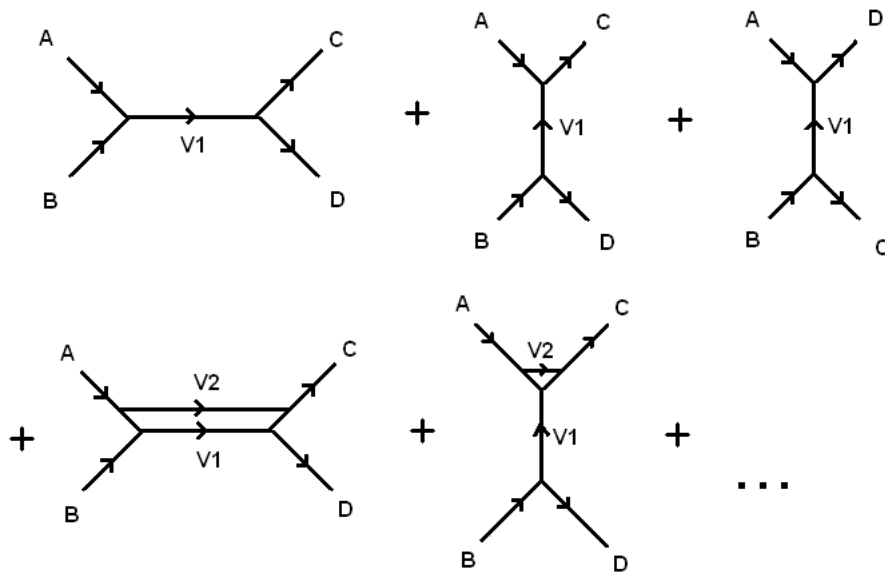
Daarnaast geldt dat er tijdens de interactie energie in massa omgezet kan worden. Dit niet-elastische aspect gaat ten koste van de impuls van de uitgaande deeltjes en onderdrukt de verstrooiing. Als er net genoeg energie is om de uitgaande deeltjes te produceren, hebben de uitgaande deeltjes geen impuls. In dat geval geldt dat er geen verstrooiing is en dat de botsingsdoorsnede nul is.

Nu de uitdrukkingen voor de botsingsdoorsnede en de differentiële werkzame doorsnede bekend zijn, kan er gekeken worden naar manieren om de botsingsdoorsnede te berekenen.

3.2 De botsingsdoorsnede als machtreeks

De botsingsdoorsnede σ kan experimenteel bepaald worden door een detector de mate van verstrooiing te laten meten. Dit doet een detector door de deeltjes te registreren die bij een bepaalde hoek verstrooid worden. Om te kijken of de theoretische voorspellingen voor het matrixelement correct zijn, is het handig om experimentele uitkomsten met deze voorspellingen te kunnen vergelijken. Het matrixelement \mathcal{M} kan echter niet exact berekend worden. Gelukkig is het wel mogelijk het matrixelement te benaderen.

Dit is te zien door een botsingsproces te bekijken waarin er twee inkomende deeltjes A en B en twee uitgaande deeltjes C en D zijn. Het botsingsproces $A+B \rightarrow C+D$ kan worden weergegeven in zogenaamde Feynmandiagrammen. Een aantal relevante Feynmandiagrammen voor het proces $A+B \rightarrow C+D$ zijn weergegeven in figuur 5.



Figuur 5: Een aantal Feynmandiagrammen die een bijdrage leveren aan de botsingsdoorsnede van het proces $A+B \rightarrow C+D$

In het diagram linksboven interageren de deeltjes A en B met elkaar en vormen een deeltje V1, die later weer vervalt naar de deeltjes C en D. Er is echter geen enkele reden waarom er tussendoor geen andere deeltjes gevormd kunnen worden (zoals bijvoorbeeld een extra deeltje V2 dat uitgewisseld wordt). Dit is te zien in de Feynmandiagrammen die in de onderste regel afgebeeld zijn. Elk proces dat fysisch gezien mogelijk is, draagt bij aan de botsingsdoorsnede.

De Feynmandiagrammen in de onderste regel van figuur 5 zijn virtuele diagrammen. Virtuele diagrammen hebben betrekking op het uitwisselen van extra virtuele deeltjes. Virtuele deeltjes zijn deeltjes die maar een korte tijd bestaan en niet in de eindtoestand van een botsingsproces voorkomen. Diagrammen waarbij de extra deeltjes niet virtueel zijn worden reële diagrammen genoemd.

Bij Feynmandiagrammen horen bepaalde Feynmanregels. Er geldt bijvoorbeeld dat elke interne lijn in een Feynmandiagram correspondeert met een propagator. Een propagator geeft aan wat de kans is dat een deeltje beweegt van een punt in de ruimte-tijd naar een ander punt in de ruimte-tijd. Voor een deeltje met massa m en vierimpuls p is de propagator P van de volgende vorm [15]:

$$P \sim \frac{1}{p^2 - m^2 c^2} \equiv \frac{1}{(E/c)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 c^2} \quad (10)$$

Hierbij is c de lichtsnelheid en E en \vec{p} zijn de totale energie en impuls van het deeltje. De precieze vorm van de teller hangt af van de eigenschappen van het deeltje.

Daarnaast komen ook vertices in Feynmandiagrammen voor. Dit zijn de punten waar verschillende lijnen in een Feynmandiagram bij elkaar komen. De Feynmanregel die bij een vertex hoort, verschilt per type deeltje. Er geldt wel in het algemeen dat een vertex correspondeert met een koppelingsconstante g . Deze koppelingsconstante geeft de sterkte van de interactie tussen de deeltjes aan.

Er geldt dat elk Feynmandiagram correspondeert met een matrixelement. Om dit matrixelement te krijgen, moeten de propagatoren en de koppelingsconstanten die bij een Feynmandiagram horen met elkaar vermenigvuldigd worden. Om de waarschijnlijkheid voor een bepaald proces te krijgen, is $|\mathcal{M}|^2$ nodig (zie paragraaf 3.1). Deze grootte kan op de volgende manier worden geschreven (waarbij \mathcal{M}^* de complex geconjugeerde van het matrixelement is):

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= (\mathcal{M}_{LO} + \mathcal{M}_{NLO} + \dots)(\mathcal{M}_{LO} + \mathcal{M}_{NLO} + \dots)^* \\ &= |\mathcal{M}_{LO}|^2 + \mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}_{NLO}^* + \mathcal{M}_{NLO}\mathcal{M}_{LO}^* + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Hierbij geeft \mathcal{M}_{LO} het matrixelement van de laagste orde aan.

Dit matricelement heeft betrekking op de Feynmandiagrammen met de laagste macht in de koppelingsconstante g . Het kwadraat van dit matricelement geeft een bijdrage aan de botsingsdoorsnede van de laagste orde. De termen $\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}_{NLO}^*$ en $\mathcal{M}_{NLO}\mathcal{M}_{LO}^*$ geven een bijdrage aan de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede. Hierbij is \mathcal{M}_{NLO} het matricelement dat betrekking heeft op Feynmandiagrammen waarin één virtueel deeltje extra wordt uitgewisseld ten opzichte van de Feynmandiagrammen die horen bij de botsingsdoorsnede van de laagste orde. Daarnaast geven ook reële diagrammen met een extra deeltje in de eindtoestand een bijdrage aan de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede. In vergelijking 11 zijn hogere orde correcties op het matricelement (die aangegeven worden met NNLO, NNNLO enz.) niet meegenomen.

Omdat de afzonderlijke bijdragen van de reële en virtuele Feynmandiagrammen divergent zijn [15], worden berekeningen in de praktijk niet in 4 ruimte-tijd dimensies, maar in $4+\varepsilon$ dimensies uitgevoerd. De divergenties geven dan aanleiding tot ε -polen. Als de bijdragen van de reële en virtuele diagrammen bij elkaar opgeteld worden, vallen de ε -polen weg. Uiteindelijk kan de limiet $\varepsilon \rightarrow 0$ veilig worden genomen.

Meestal wordt $|\mathcal{M}|^2$ niet in termen van de koppelingsconstante g geschreven, maar in termen van

$$\alpha \equiv \frac{g^2}{4\pi} \quad (12)$$

De Feynmandiagrammen die in figuur 5 in de bovenste regel staan, corresponderen dus met een waarschijnlijkheidsamplitude van $\mathcal{O}(\alpha)$. De Feynmandiagrammen in de onderste regel hebben dan een waarschijnlijkheidsamplitude van $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Elke uitwisseling van een deeltje geeft aanleiding tot een extra factor α in de bijdrage aan de waarschijnlijkheidsamplitude van een proces.

De botsingsdoorsnede kan geschreven worden als een machtreeks in α . Bij energieën die relevant zijn voor de huidige deeltjesversnellers, geldt dat α veel kleiner is dan 1 voor alle bekende natuurkrachten. Hieruit volgt dat de Feynmandiagrammen die een uitwisseling van veel deeltjes beschrijven, een veel kleinere kans hebben voor te komen dan de diagrammen die een uitwisseling van weinig deeltjes beschrijven. Dat betekent dat voor een goede benadering van de botsingsdoorsnede niet alle Feynmandiagrammen meegenomen hoeven te worden. Voor een goede benadering kan de machtreeks in α na een aantal termen worden afgebroken.

3.3 De machtreeks bij de kinematische drempel

Omdat supersymmetrische deeltjes nog niet waargenomen zijn in deeltjesversnellers, moeten ze zwaarder zijn dan de deeltjes in het standaardmodel (zie 2.2.1). Dat betekent dat ze pas bij hogere energieën geproduceerd kunnen worden dan tot nu toe bereikt zijn in deeltjesversnellers. Als supersymmetrische deeltjes uiteindelijk geproduceerd worden, is de kans dus groot dat deze deeltjes (bijna) geen impuls meekrijgen. Dat komt omdat dan alle energie van de inkomende deeltjes in de massa van de supersymmetrische deeltjes zit. De situatie waarbij de uitgaande deeltjes in een botsingsproces geen impuls meekrijgen, wordt de kinematische drempel genoemd.

In paragraaf 3.2 is beredeneerd dat de botsingsdoorsnede als machtreeks in α geschreven kan worden. In het geval van gluinopproductie is dit α_s , die geschreven kan worden in termen van de sterke koppelingsconstante g_s .

Daarnaast komt in de machtreeks voor de botsingsdoorsnede ook de variabele β voor. Deze variabele β is voor gluinopproductie te definiëren in termen van de lichtsnelheid c , de gluinomassa $m_{\tilde{g}}$ en de massamiddelpuntsenergie E_{CM} (de totale energie van de inkomende deeltjes):

$$\beta_g \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_{\tilde{g}}^2 c^4}{E_{CM}^2}} \quad (13)$$

Bij de kinematische drempel geldt dat de totale energie E_{CM} van de inkomende deeltjes gelijk is aan de rustenergie $2m_{\tilde{g}}c^2$ van de uitgaande deeltjes. Uit vergelijking 13 volgt dan dat de variabele β_g bij de kinematische drempel nul is.

In paragraaf 3.2 is uitgelegd dat α_s kleiner is dan 1 voor de relevante energieën in deeltjesversnellers. In de machtreeks voor de botsingsdoorsnede blijken de machten van α_s echter ook met machten van de variabele L vermenigvuldigd te worden. Deze variabele is voor gluinopproductie gedefinieerd als

$$L \equiv \log(8\beta_g^2) \quad (14)$$

Hierbij wordt met log de natuurlijke logaritme bedoeld. In de buurt van de kinematische drempel wordt β_g klein en dat betekent dat de variabele L dan groot wordt. Vanwege de significante bijdrage van de hogere machten van L moeten er dus meer termen meegenomen worden in de benadering van de botsingsdoorsnede. Het uiteindelijke doel is om de machten van α_s en L op een zodanige manier te hersommen dat er een goede benadering voor de botsingsdoorsnede mogelijk is.

De machten van α_s en L in de eerste termen van de machtreeks zijn van de vorm [8]:

$$\begin{array}{l} LO \\ NLO \\ NNLO \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ \alpha_s L^2 \\ \alpha_s^2 L^4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_s L \\ \alpha_s^2 L^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_s \\ \alpha_s^2 L^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_s^2 L \\ \alpha_s^2 \end{array} \quad (15)$$

Hierbij zijn de voorfactoren weggelaten en is de α_s^2 -afhankelijkheid van de botsingsdoorsnede op laagste orde uitgedeeld. Door de termen verticaal bij elkaar op te tellen, blijken e-machten te ontstaan die met de botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel vermenigvuldigd worden [12]. Dit wordt hersommatie genoemd.

Deze e-machten geven aanleiding tot een nieuwe reeksontwikkeling. Hierbij wordt de eerste e-macht in de reeksontwikkeling met LL aangegeven, de tweede e-macht met NLL, de derde e-macht met NNLL enzovoorts. De LL- en de NLL-term worden vermenigvuldigd met de botsingsdoorsnede op laagste orde bij de kinematische drempel. De uitdrukking hiervoor is al bekend [10]. Om de hersommatie kloppend te maken, moet de NNLL-term echter met de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel vermenigvuldigd worden [13].

Zoals in paragraaf 3.2 is uitgelegd, bestaat de botsingsdoorsnede uit een reëel en een virtueel deel. De reële bijdrage aan de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel is voor gluinopproductie al berekend [9]. Het doel van het onderzoek waar het hier over gaat is om voor het botsingsproces $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ de virtuele bijdrage aan de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede te berekenen. Dit wordt gedaan bij de kinematische drempel.

Daarvoor wordt de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede geschreven in termen van de variabele β_g , omdat het gedrag van deze variabele bij de kinematische drempel bekend is. Uiteindelijk is het doel een uitdrukking te hebben van $\mathcal{O}(\beta_g)$. Omdat β_g bij de kinematische drempel klein is, hoeven hogere machten van β_g niet meegenomen te worden in de berekening. De berekening wordt gedaan met behulp van het algebraïsche manipulatieprogramma FORM [5].

4 De berekening

In dit hoofdstuk staat de berekening van de botsingsdoorsnede uitgelegd. Deze berekening is gedaan bij de kinematische drempel (zie paragraaf 3.3). Het matrixelement en de botsingsdoorsnede zijn in paragraaf 3.1 gedefinieerd. Eerst moet er wat kinematica behandeld worden (paragraaf 4.1), voordat $|\mathcal{M}|^2$ berekend kan worden (paragraaf 4.2). Daarna zijn er nog een aantal stappen nodig om van $|\mathcal{M}|^2$ over te gaan naar de botsingsdoorsnede en de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede te vereenvoudigen (paragraaf 4.3).

4.1 Kinematica

Voordat het matrixelement berekend kan worden, moet er eerst naar de kinematica van botsingen gekeken worden. Omdat in deeltjesversnellers hoge snelheden bereikt worden (zie 2.2.2), moet de relativiteitstheorie gebruikt worden om botsingen door te rekenen.

4.1.1 Inleiding in de relativistische kinematica

Om kinematische processen te beschrijven wordt er in de relativiteitstheorie gebruik gemaakt van viervectoren. Een viervector heeft vier componenten die met de nummers 0, 1, 2 en 3 aangegeven worden. De twee belangrijkste viervectoren zijn:

- de plaatsviervector

$$x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (16)$$

- de impulsviervector

$$p^\mu \equiv \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (17)$$

Hierbij geeft de Griekse letter μ de componenten van de viervector aan, voor de plaatsviervector is dit $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ en $x^3 = z$. Hierbij is c de lichtsnelheid, t de tijd en x , y en z zijn de plaatscoördinaten van het deeltje waar de viervector betrekking op heeft. Voor een deeltje met energie E en een impuls p_x , p_y en p_z in de x, y en z-richting geldt dan $p^0 = E/c$, $p^1 = p_x$, $p^2 = p_y$ en $p^3 = p_z$. De twee viervectoren die hierboven staan, zijn zogenaamde contravariante viervectoren. De covariante vorm is gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} x_\mu &\equiv (ct \quad -x \quad -y \quad -z) \\ p_\mu &\equiv (\frac{E}{c} \quad -p_x \quad -p_y \quad -p_z) \end{aligned} \quad (18)$$

Dan is het mogelijk het kwadraat van de plaatsviervector te nemen, namelijk

$$x^2 \equiv x^\mu x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - |\vec{x}|^2 \quad (19)$$

Hierbij is de Einstein sommatie conventie gebruikt en is \vec{x} het ruimtelijke gedeelte van de plaatsviervector. Voor een deeltje met massa m en totale impuls \vec{p} wordt het kwadraat van de impulsviervector

$$p^2 \equiv p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = (E/c)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2 \quad (20)$$

In de laatste stap is hier de vergelijking

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (21)$$

ingevuld. In de relativiteitstheorie wordt er veel gebruik gemaakt van invariante grootheden (scalair), omdat ze niet veranderen bij een overgang naar een ander inertiaalstelsel. Stel nu dat er een botsingsexperiment is waarbij de inkomende deeltjes A en B en de uitgaande deeltjes C en D genoemd worden. Dan is het mogelijk om (naast de massa's van de deeltjes) de volgende invariante grootheden te definiëren:

$$s \equiv \frac{(p_A + p_B)^2}{c^2} \quad (22)$$

$$t \equiv \frac{(p_A - p_C)^2}{c^2} \quad (23)$$

$$u \equiv \frac{(p_A - p_D)^2}{c^2} \quad (24)$$

Hierbij zijn p_A, p_B, p_C en p_D de impulsviervectoren van de deeltjes A, B, C en D. De variabelen s, t en u worden Mandelstamvariabelen genoemd. Vanwege energie- en impulsbehoud zijn er maar drie unieke Mandelstamvariabelen. Voor gluinopproductie is het handig om met behulp van de Mandelstamvariabelen t en u , de gluinomassa $m_{\bar{q}}$ en de squarkmassa $m_{\bar{q}}$ een aantal nieuwe invariante grootheden te definiëren:

$$\begin{aligned} t_1 &\equiv t - m_{\bar{q}}^2 \\ t_g &\equiv t - m_g^2 \\ u_1 &\equiv u - m_{\bar{q}}^2 \\ u_g &\equiv u - m_g^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Mandelstamvariabelen worden veel gebruikt bij het bepalen van matrixelementen. Dat komt doordat het matrixelement alle dynamische informatie bevat over een botsingsproces (zie paragraaf 3.1). Deze dynamische informatie is weer uit te drukken in combinaties van impulsen van ingaande en uitgaande deeltjes en dus in Mandelstamvariabelen. Nu deze variabelen bekend zijn, is het tijd om te kijken hoe ze zich gedragen bij de kinematische drempel.

4.1.2 Mandelstamvariabelen bij de kinematische drempel

Om het gedrag van de Mandelstamvariabelen s , t en u te bepalen bij de kinematische drempel, worden ze uitgedrukt in β_g . In paragraaf 3.3 is namelijk beredeneerd dat het gedrag van β_g bij de kinematische drempel bekend is: β_g gaat dan naar 0. Als de Mandelstamvariabelen s , t en u in termen van β_g bekend zijn, is het gedrag bij de kinematische drempel van alle invariante grootheden uit 4.1.1 te bepalen.

Als eerste wordt er naar een uitdrukking voor s gezocht in termen van β_g . Dit is te doen door de formule voor s (vergelijking 22) om te schrijven voor het geval dat er vanuit het massamiddelpuntsstelsel gekeken wordt (dit verandert niets aan s , omdat Mandelstamvariabelen invariant zijn onder coördinaten-transformaties).

Het massamiddelpuntsstelsel is in paragraaf 3.1 gedefinieerd. De inkomende deeltjes A en B hebben bij gluinopproductie (het botsingsproces waar hier naar gekeken wordt) dezelfde massa. Dan volgt uit het feit dat de impulsen van de inkomende deeltjes gelijk zijn (vergelijking 6) en uit vergelijking 21 dat de energieën van de inkomende deeltjes gelijk zijn:

$$E_A = E_B \quad (26)$$

Aangezien ook de uitgaande deeltjes C en D dezelfde massa hebben, volgt op dezelfde manier

$$E_C = E_D \quad (27)$$

Uit energiebehoud ($E_A + E_B = E_C + E_D$) is dan af te leiden dat

$$E_A = E_B = E_C = E_D \quad (28)$$

Met behulp van vergelijking 6 is s nu te schrijven in termen van de massamiddelpuntsenergie E_{CM} , die gelijk is aan $E_A + E_B$. De uitdrukking voor s wordt dan:

$$\begin{aligned} s &\equiv \frac{(p_A + p_B)^2}{c^2} \\ &= \frac{\left(\frac{E_A}{c} + \frac{E_B}{c}\right)^2}{c^2} \\ &= \frac{E_{CM}^2}{c^4} \end{aligned} \quad (29)$$

De definitie van β_g uit paragraaf 3.3 is met behulp van deze vergelijking te schrijven als:

$$\beta_g \equiv \sqrt{1 - \frac{4m_g^2}{s}} \quad (30)$$

De uitdrukking voor s in termen van β_g volgt dan uit het omschrijven van deze vergelijking. De uitdrukking voor s is dan uiteindelijk

$$s = \frac{4m_g^2}{1 - \beta_g^2} \quad (31)$$

Om een uitdrukking voor t en u in termen van β_g te vinden, is er eerst een uitdrukking voor \vec{p}_{in} (de impuls van één van de inkomende deeltjes) nodig. Hiervoor geldt de benadering dat de massa van de inkomende deeltjes (de quarkmassa m_q) erg klein en dus verwaarloosbaar is. Dit geldt zeker in vergelijking met de massa van de gluino's, omdat supersymmetrie een gebroken symmetrie is (zie paragraaf 2.2.1).

Met behulp van vergelijkingen 6, 21 en 26 en met $E_{in} = E_A = E_B$ wordt de uitdrukking voor s :

$$\begin{aligned}
s &= \frac{(p_A + p_B)^2}{c^2} \\
&= \frac{(2E_{in}/c)^2}{c^2} \\
&= \frac{4(|\vec{p}_{in}|^2 + m_q^2 c^2)}{c^2} \\
&\approx \frac{4|\vec{p}_{in}|^2}{c^2}
\end{aligned} \tag{32}$$

Invullen van deze uitdrukking in vergelijking 31 geeft uiteindelijk

$$|\vec{p}_{in}|^2 = \frac{m_g^2 c^2}{1 - \beta_g^2} \tag{33}$$

Verder is er nog een uitdrukking nodig voor de impuls van één van de uitgaande deeltjes (\vec{p}_{uit}). Hierbij mag de massa van de uitgaande deeltjes (de gluinomassa $m_{\bar{g}}$) niet verwaarloosd worden, maar de quarkmassa m_q wel. De gezochte uitdrukking volgt uit energiebehoud (vergelijking 28) en uit het verband tussen energie en impuls (vergelijking 21):

$$|\vec{p}_{in}|^2 c^2 = |\vec{p}_{uit}|^2 c^2 + m_{\bar{g}}^2 c^4 \tag{34}$$

$$|\vec{p}_{uit}| = \sqrt{|\vec{p}_{in}|^2 - m_{\bar{g}}^2 c^2} \tag{35}$$

Nu kan t in termen van β_g geschreven worden. Hierbij is energiebehoud (vergelijking 28) gebruikt en is θ gedefinieerd als de hoek tussen het ingaande en het uitgaande deeltje waar t betrekking op heeft. De gezochte uitdrukking wordt dan:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{-|\vec{p}_{in} - \vec{p}_{uit}|^2}{c^2} \\
&= \frac{-|\vec{p}_{in}|^2 - |\vec{p}_{uit}|^2 + 2|\vec{p}_{in}||\vec{p}_{uit}|\cos\theta}{c^2} \\
&= -m_{\bar{g}}^2 \left(\frac{1 + \beta_g^2}{1 - \beta_g^2} - \frac{2\beta_g}{1 - \beta_g^2} \cos\theta \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

In de laatste stap zijn de vergelijkingen 33 en 35 ingevuld. Op dezelfde manier als voor t volgt de uitdrukking voor u in termen van β_g . Het enige verschil is dat er tussen het ingaande en uitgaande deeltje waar u betrekking op heeft een hoek van $\pi - \theta$ in plaats van θ zit. Dit levert een relatief minteken op bij de cosinus. De uitdrukking voor u is dan:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{-|\vec{p}_{in}|^2 - |\vec{p}_{uit}|^2 + 2|\vec{p}_{in}||\vec{p}_{uit}|\cos(\pi - \theta)}{c^2} \\
&= \frac{-|\vec{p}_{in}|^2 - |\vec{p}_{uit}|^2 - 2|\vec{p}_{in}||\vec{p}_{uit}|\cos\theta}{c^2} \\
&= -m_g^2 \left(\frac{1 + \beta_g^2}{1 - \beta_g^2} + \frac{2\beta_g}{1 - \beta_g^2} \cos\theta \right) \tag{37}
\end{aligned}$$

4.1.3 De botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel

Nu de Mandelstamvariabelen zijn omgeschreven in termen van β_g , is hun gedrag bij de kinematische drempel bekend. Om het gedrag van de botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel te bepalen, kan vergelijking 8 uit paragraaf 3.1 uitgedrukt worden in termen van β_g . Dit is te doen door de uitdrukkingen voor de impuls van een inkomend en een uitgaand deeltje in termen van β_g (vergelijkingen 33 en 35) in te vullen in vergelijking 8. De uitdrukking voor de differentiële werkzame doorsnede wordt dan:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_A + E_B)^2} \frac{|\vec{p}_C|}{|\vec{p}_A|} \\
&= \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_A + E_B)^2} \sqrt{\frac{\frac{m_g^2 c^2}{1 - \beta_g^2} - m_g^2 c^2}{\frac{m_g^2 c^2}{1 - \beta_g^2}}} \\
&= \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2 \beta_g}{(E_A + E_B)^2} \tag{38}
\end{aligned}$$

Het kwadraat van het matrixelement wordt dus onder andere met een factor β_g vermenigvuldigd om de differentiële werkzame doorsnede en uiteindelijk de totale botsingsdoorsnede te krijgen.

4.2 Het uitrekenen van $|\mathcal{M}|^2$

Nu het gedrag van de Mandelstamvariabelen bij de kinematische drempel bekend is, is het mogelijk naar het matrixelement te kijken. Het matrixelement bestaat uit combinaties van Mandelstamvariabelen die vermenigvuldigd worden met scalaire integralen. De Mandelstamvariabelen en de integralen zijn tevens de enige termen in de uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ die een hoekafhankelijkheid kunnen bevatten.

Het doel is een uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ te vinden bij de kinematische drempel, waar β_g naar 0 gaat (zie paragraaf 3.3). Verder is bekend dat bij de overgang naar de botsingsdoorsnede het matrixelement wordt vermenigvuldigd met β_g (zie 4.1.3). In paragraaf 3.3 is uitgelegd dat het uiteindelijke doel is een uitdrukking voor de totale botsingsdoorsnede te vinden van $\mathcal{O}(\beta_g)$. Daarvoor moet $|\mathcal{M}|^2$ geëxpandeerd worden tot nulde orde in β_g . Dat betekent dat in de uitdrukking voor het matrixelement alleen negatieve machten en de nulde macht van β_g meegenomen worden.

De botsingsdoorsnede is een meetbare fysische grootte (zie paragraaf 3.2). Dat betekent dat er geen negatieve machten van β_g in de totale botsingsdoorsnede mogen voorkomen, omdat de botsingsdoorsnede niet mag opblazen bij de kinematische drempel. Voor het matrixelement betekent dat dat er uiteindelijk alleen $1/\beta_g$ als negatieve macht van β_g in de uitdrukking mag voorkomen. Alle andere negatieve machten van β_g zouden bij de uiteindelijke uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ tegen elkaar moeten wegvallen.

In 4.2.1 wordt ingegaan op het uitwerken van de Mandelstamvariabelen in $|\mathcal{M}|^2$ en in 4.2.2 is uitgelegd hoe de integralen in $|\mathcal{M}|^2$ uitgewerkt zijn.

4.2.1 De Mandelstamvariabelen in $|\mathcal{M}|^2$

In de uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ blijken termen $1/(s-4m_g^2)^2 = \mathcal{O}(1/\beta_g^4)$ voor te komen. Dit is tevens de hoogste negatieve macht van β_g die in de uitdrukking voorkomt. De integralen die in de uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ staan, kunnen alleen maar $1/\beta_g$ als negatieve macht van β_g bevatten (zie 4.2.2). Het blijkt dat de termen $1/(s-4m_g^2)^2$ nooit worden vermenigvuldigd met een integraal die een bijdrage $1/\beta_g$ bevat.

Om de nulde orde term in β_g te krijgen, is het dus voldoende om een Taylorexpansie op de Mandelstamvariabelen toe te passen rond $\beta_g = 0$ tot $\mathcal{O}(\beta_g^4)$. Hoe deze expansies in de code van de berekening geïmplementeerd zijn, is terug te vinden in bijlage 1. Uiteindelijk blijven er enkele termen in de uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ over die met $1/\beta_g^2$ gaan. Het verder expanderen van de Mandelstamvariabelen helpt niet om deze termen weg te krijgen, omdat de termen met $1/\beta_g^2$ niet kunnen wegvallen tegen hogere orde expansies van de Mandelstamvariabelen.

De termen met $1/\beta_g^2$ lijken een probleem, maar de Mandelstamvariabelen worden ook nog met integralen vermenigvuldigd. In principe moeten de integralen tot $\mathcal{O}(\beta_g^2)$ geëxpandeerd worden om de nulde orde term in β_g te krijgen. Maar dat is in dit geval niet nodig. Om de totale botsingsdoorsnede te krijgen, moet $|\mathcal{M}|^2$ namelijk over $\cos\theta$ geïntegreerd worden (van -1 tot 1). Dit is uitgelegd in paragraaf 3.1.

De termen met $1/\beta_g^2$ worden vermenigvuldigd met integralen zonder hoekafhankelijkheid. De hoekafhankelijkheid bij deze termen moet dus komen van de Mandelstamvariabelen, omdat de Mandelstamvariabelen en de integralen de enige termen zijn die een hoekafhankelijkheid kunnen bevatten.

De relevante hoekafhankelijkheid waarmee de termen $1/\beta_g^2$ vermenigvuldigd worden, is $1 + 3 \cos(2\theta)$. De integraal over deze hoekafhankelijkheid is te schrijven als:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 + 3 \cos(2\theta) \, d \cos \theta &= \int_{-1}^1 1 + 3(2 \cos^2 \theta - 1) \, d \cos \theta \\ &= \int_{-1}^1 6 \cos^2 \theta - 2 \, d \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Deze termen geven dus uiteindelijk geen bijdrage, omdat ze wegvallen als de totale botsingsdoorsnede berekend wordt.

Er zijn ook termen met $1/\beta_g^2$ die met $\sin^2 \theta$ of $\cos^2 \theta$ vermenigvuldigd worden. Deze termen worden echter ook met ε vermenigvuldigd. De definitie van ε staat in paragraaf 3.2, waar ook is uitgelegd dat ε uiteindelijk 0 wordt. Daarom is de vermenigvuldiging met een integraal die een negatieve macht van ε bevat de enige manier om een bijdrage aan de botsingsdoorsnede te krijgen. De integralen die vermenigvuldigd worden met $1/\beta_g^2$ bevatten echter geen negatieve macht van ε . Dat betekent dat ook deze termen met $1/\beta_g^2$ wegvallen bij de berekening van de totale botsingsdoorsnede.

Uit de bovenstaande redenering volgt dat het voldoende is om de integralen tot nulde orde in β_g te expanderen, aangezien de termen $1/\beta_g^2$ in de uitdrukking voor het matrixelement wegvallen bij de berekening van de totale botsingsdoorsnede. Het kan echter zo zijn dat de differentiële werkzame doorsnede (zoals gedefinieerd in paragraaf 3.1) oneindigheden bevat, omdat er tot nu toe alleen gekeken is naar eventuele oneindigheden in de totale botsingsdoorsnede. Er is expliciet gecheckt dat er geen oneindigheden in de differentiële werkzame doorsnede zijn. Deze check staat beschreven in hoofdstuk 5.

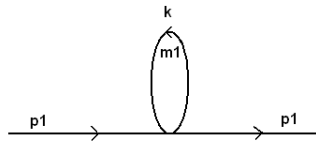
4.2.2 De integralen in $|\mathcal{M}|^2$

Nu de Mandelstamvariabelen geëxpandeerd zijn, is het tijd om naar de scalaire integralen te kijken die in de uitdrukking voor het matrixelement voorkomen. Deze integralen geven informatie over verschillende soorten virtuele processen die tijdens een botsing voor kunnen komen.

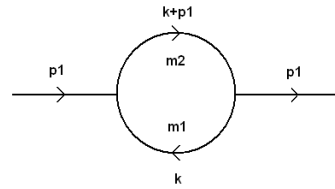
De fysische betekenis en definitie van de integralen

Er zijn vier typen scalaire Feynmandiagrammen die relevant zijn voor gluinopproductie. Deze diagrammen worden A_0 , B_0 , C_0 en D_0 genoemd en ze zijn weergegeven in figuur 6. Hierbij zijn m_1 , m_2 , m_3 en m_4 massa's van virtuele deeltjes en k , p_1 , p_2 , p_3 en p_4 zijn impulsvectoren. De definitie van een impulsvector is terug te vinden in paragraaf 4.1.1.

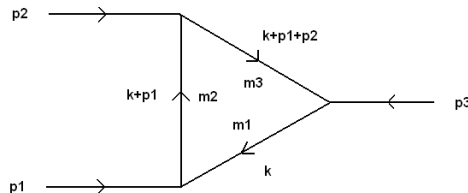
Figuur 6: De Feynmandiagrammen die bij de integralen horen



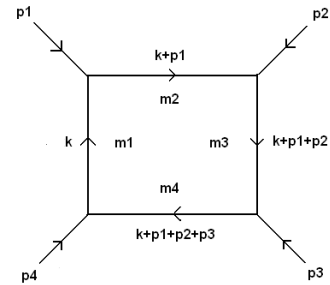
(a) Het diagram dat bij A_0 hoort



(b) Het diagram dat bij B_0 hoort



(c) Het diagram dat bij C_0 hoort



(d) Het diagram dat bij D_0 hoort

Om informatie over botsingsprocessen te krijgen, is de propagator belangrijk. Zoals in paragraaf 3.2 is uitgelegd, geeft de propagator de beweging van een deeltje in de ruimte-tijd aan. Verder geldt dat de propagatoren van verschillende deeltjes binnen een diagram met elkaar vermenigvuldigd moeten worden.

De impulsvectoren p_1 , p_2 , p_3 en p_4 kunnen in principe gereconstrueerd worden uit impulsen van externe deeltjes door middel van energie- en impulsbehoud. Voor k is dat niet het geval. Dit komt doordat er te weinig (vierimpuls)condities zijn om k vast te leggen. Vanwege het superpositieprincipe uit de kwantummechanica moet er daarom over alle mogelijke waarden van k geïntegreerd worden (in n dimensies).

De volgende wiskundige structuren horen bij de Feynmandiagrammen uit figuur 6:

$$\begin{aligned}
A_0(m_1) &\sim \int \frac{1}{D_1} d^n k \\
B_0(p_1, m_1, m_2) &\sim \int \frac{1}{D_1 D_2} d^n k \\
B'_0(p_1, m_1, m_2) &\sim \frac{dB_0(p_1, m_1, m_2)}{dp_1^2} \\
C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) &\sim \int \frac{1}{D_1 D_2 D_3} d^n k \\
D_0(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, m_4) &\sim \int \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} d^n k \quad (40)
\end{aligned}$$

Hierbij worden D_1 t/m D_4 gegeven door:

$$\begin{aligned}
D_1 &= k^2 - m_1^2 \\
D_2 &= (k + p_1)^2 - m_2^2 \\
D_3 &= (k + p_1 + p_2)^2 - m_3^2 \\
D_4 &= (k + p_1 + p_2 + p_3)^2 - m_4^2 \quad (41)
\end{aligned}$$

Er is hier nog een extra integraal B'_0 gedefinieerd, die een afgeleide is van de integraal B_0 . De uitdrukkingen voor de integralen zijn al bekend voor verschillende combinaties van massa's [14]. Zoals in 4.2.1 is uitgelegd, moeten de integralen geëxpandeerd worden tot nulde orde in β_g .

Het expanderen van de integralen

Bij het expanderen van de integralen moet er op een aantal dingen gelet worden. Zo zijn de integralen in de uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ gedefinieerd in termen van de impulsviervectoren g_1 en g_2 van de inkomende deeltjes en de impulsviervectoren p_1 en p_2 van de uitgaande deeltjes. In 4.1.1 is in vergelijking 20 een verband afgeleid tussen het kwadraat van een impulsviervector p en de massa m van het deeltje waar die viervector betrekking op heeft. In de hoge-energiefysica wordt vaak $c = 1$ genomen, omdat het dan makkelijker is om met vergelijkingen te werken. Voor het uitwerken van de integralen zal deze vereenvoudiging gebruikt worden. Vergelijking 20 wordt in dat geval

$$p^2 = m^2 \quad (42)$$

Voor gluinopproductie geldt dat de massa van de inkomende deeltjes de quarkmassa m_q is en dat de massa van de uitgaande deeltjes de gluinomassa $m_{\bar{g}}$ is. Omdat de quarkmassa zo klein is, kan deze massa verwaarloosd worden (zoals uitgelegd in 4.1.2).

Dat betekent dat het volgende geldt voor de impulsviervectoren g_1 en g_2 van de inkomende deeltjes en de impulsviervectoren p_1 en p_2 van de uitgaande deeltjes:

$$g_1^2 = g_2^2 = m_q^2 \approx 0 \quad (43)$$

$$p_1^2 = p_2^2 = m_{\bar{g}}^2 \quad (44)$$

In de integralen komen functies van Mandelstamvariabelen voor. In 4.1.2 is de uitdrukking bepaald voor de Mandelstamvariabelen s , t en u in termen van β_g . Omdat uit 4.2.1 volgt dat de integralen tot nulde orde in β_g geëxpandeerd moeten worden, is het in de meeste gevallen voldoende als er in de uitdrukking voor de Mandelstamvariabelen $\beta_g = 0$ wordt ingevuld. Daarna kan deze uitdrukking voor de Mandelstamvariabelen worden ingevuld in de integralen. Echter, sommige integralen (de zogenaamde Coulomb-integralen) bevatten een voorfactor $1/\beta_g$ waarmee de Mandelstamvariabelen worden vermenigvuldigd. In dat geval moeten de Mandelstamvariabelen tot $\mathcal{O}(\beta_g)$ geëxpandeerd worden om te zorgen dat deze integralen tot nulde orde in β_g geëxpandeerd zijn.

In het geval dat alleen maar de nulde orde term in β_g meegenomen hoeft te worden, volgt uit vergelijkingen 31, 36 en 37:

$$\begin{aligned} s &\equiv (g_1 + g_2)^2 = 4m_{\bar{g}}^2 \\ t &\equiv (g_1 - p_1)^2 = -m_{\bar{g}}^2 \\ u &\equiv (g_1 - p_2)^2 = -m_{\bar{g}}^2 \end{aligned} \quad (45)$$

Hierbij is in de uitdrukking voor de Mandelstamvariabelen $\beta_g = 0$ ingevuld.

Relaties tussen integralen

Om tijd te besparen bij het expanderen van de integralen, is het handig bepaalde integralen aan elkaar te relateren. Door bijvoorbeeld de substitutie $k \rightarrow -k - p_1$ te kiezen, kan worden afgeleid dat

$$B_0(p_1, m_1, m_2) = B_0(p_1, m_2, m_1) \quad (46)$$

Ook geldt met de substitutie $k \rightarrow -k + g_1 - p_1$ dat

$$C_0(-g_1, p_1, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_1, -g_1, m_3, m_2, m_1) \quad (47)$$

De integralen zijn scalaire integralen, dus ze kunnen alleen maar van scalaire grootheden afhangen. Een integraal kan dus alleen van massa's en kwadraten van (combinaties van) impulsviervectoren afhangen. Verder geldt vanwege energie- en impulsbehoud:

$$\begin{aligned} t &\equiv (g_1 - p_1)^2 = (g_2 - p_2)^2 \\ u &\equiv (g_1 - p_2)^2 = (g_2 - p_1)^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Dat betekent dat de integralen hetzelfde blijven als zowel p_1 en p_2 als g_1 en g_2 verwisseld worden. Er geldt bijvoorbeeld

$$D_0(p_2, -g_1, p_1, 0, m_1, m_2, 0) = D_0(p_1, -g_2, p_2, 0, m_1, m_2, 0) \quad (49)$$

en met de substitutie $k \rightarrow k + p_2 - g_1$ volgt ook

$$D_0(p_1, -g_2, p_2, 0, m_1, m_2, 0) = D_0(p_2, -g_1, p_1, m_2, 0, 0, m_1) \quad (50)$$

Breuksplitsen bij de kinematische drempel

Bij de kinematische drempel (waar in het massamiddelpuntsstelsel de uitgaande deeltjes geen impuls hebben) geldt dat de impulsviervectoren van de uitgaande deeltjes gelijk zijn aan elkaar:

$$p_1 = p_2 \quad (51)$$

Dit volgt rechtstreeks uit het feit dat de energieën van de twee deeltje aan elkaar gelijk zijn (zie vergelijking 27). Hiermee is de integraal $D_0(p_1, -g_1, p_2, m_1, m_2, m_3, m_4)$ om te schrijven in een combinatie van C_0 integralen door middel van breuksplitsen. Voor het omschrijven van deze integraal is de definitie van D_0 uit vergelijking 40 gebruikt. De propagator binnen de integraal kan als volgt worden omschreven:

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \frac{A_1}{D_1 D_2 D_3} + \frac{A_2}{D_1 D_2 D_4} + \frac{A_3}{D_1 D_3 D_4} + \frac{A_4}{D_2 D_3 D_4} \quad (52)$$

De coëfficiënten A_1 t/m A_4 moeten nog bepaald worden. In dit geval volgt uit de definitie van D_0 dat D_1 t/m D_4 gegeven worden door:

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2 - m_1^2 \\ D_2 &= (k + p_1)^2 - m_2^2 \\ D_3 &= (k + p_1 - g_1)^2 - m_3^2 \\ D_4 &= (k + p_1 - g_1 + p_2)^2 - m_4^2 \\ &= (k + 2p_1 - g_1)^2 - m_4^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Hierbij is in de definitie van D_4 ingevuld dat $p_1 = p_2$ (zie vergelijking 51). Met behulp van de juiste substituties voor k en het omwisselen van zowel p_2 en p_1 als g_2 en g_1 zijn in vergelijking 52 de volgende combinaties van C_0 integralen te herkennen:

$$\begin{aligned} D_0(p_1, -g_1, p_2, m_1, m_2, m_3, m_4) &= A_1 C_0(p_1, -g_1, m_1, m_2, m_3) + \\ &A_2 C_0(p_1, -g_1, m_2, m_1, m_4) + \\ &A_3 C_0(p_1, -g_1, m_3, m_4, m_1) + \\ &A_4 C_0(p_1, -g_1, m_4, m_3, m_2) \end{aligned} \quad (54)$$

Nu hoeven alleen nog de coëfficiënten A_1 t/m A_4 bepaald te worden. Om te zorgen dat vergelijking 52 geldt, moeten de coëfficiënten aan de volgende vergelijking voldoen:

$$D_4A_1 + D_3A_2 + D_2A_3 + D_1A_4 = 1 \quad (55)$$

De bovenstaande uitdrukking moet voor alle waarden van k gelden, omdat er over alle waarden van k geïntegreerd wordt. Deze uitdrukking heeft een oplossing vanwege $p_1 = p_2$.

Invullen van vergelijkingen 43 en 53 geeft de volgende set van vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)k^2 &= 0 \\ (4A_1 + 2A_2 + 2A_3)k \cdot p_1 &= 0 \\ (-2A_1 - 2A_2)k \cdot g_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$(4p_1^2 - 4p_1 \cdot g_1 - m_4^2)A_1 + (p_1^2 - 2p_1 \cdot g_1 - m_3^2)A_2 + (p_1^2 - m_2^2)A_3 - m_1^2A_4 = 1 \quad (56)$$

Als p_1 en p_2 niet gelijk zijn, is er nog een extra vergelijking met $k \cdot p_2$ en heeft deze set van vergelijkingen geen oplossing. De oplossing voor de coëfficiënten A_1 t/m A_4 is:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2p_1^2 - 2p_1 \cdot g_1 - m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2} \\ A_2 &= A_3 = -A_1 \\ A_4 &= A_1 \end{aligned} \quad (57)$$

In de uitkomst voor A_1 kan de uitdrukking voor p_1^2 worden ingevuld (vergelijking 44). Daarnaast kan t met behulp van vergelijking 45 worden geschreven als:

$$\begin{aligned} t &= (g_1 - p_1)^2 \\ &= g_1^2 - 2p_1 \cdot g_1 + p_1^2 \\ &= -2p_1 \cdot g_1 + m_g^2 \\ &= -m_g^2 \end{aligned} \quad (58)$$

Hierbij zijn vergelijkingen 43 en 44 ingevuld. Uit de bovenstaande vergelijking volgt

$$p_1 \cdot g_1 = m_g^2 \quad (59)$$

Invullen van deze vergelijking en de uitdrukking voor p_1^2 geeft uiteindelijk:

$$A_1 = \frac{1}{-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2} \quad (60)$$

Het omschrijven van andere integralen gaat analoog aan dit voorbeeld. Zo kunnen bijvoorbeeld bepaalde C_0 integralen omgeschreven worden in B_0 integralen.

Dit kan alleen als een C_0 integraal zowel p_1 als p_2 bevat en geen Coulomb-integraal is (en dus geen factoren $1/\beta_g$ bevat). In dat geval hebben de sets van vergelijkingen die je krijgt een oplossing en is de C_0 integraal uit te drukken in combinaties van B_0 integralen. In het geval van een Coulomb-integraal gaat het fout omdat de noemer van de coëfficiënt A_1 nul wordt. De uitwerking van de integralen in de code van de berekening is terug te vinden in bijlage 2.

4.3 Het uitrekenen van de botsingsdoorsnede

Nadat de Mandelstamvariabelen en de integralen in $|\mathcal{M}|^2$ zijn geëxpandeerd in termen van β_g , is er een uitdrukking voor $|\mathcal{M}|^2$ bij de kinematische drempel. De uitdrukking voor het virtuele deel van $|\mathcal{M}|^2$ kan omgerekend worden naar (het virtuele deel van) de botsingsdoorsnede door te integreren over $\cos \theta$ en nog een aantal constantes te implementeren. Uiteindelijk zijn we in het reële deel van de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede geïnteresseerd.

De uitdrukking voor de botsingsdoorsnede kan versimpeld worden door bijvoorbeeld identiteiten te gebruiken om bepaalde natuurlijke logaritmen (die uit de integralen komen) aan elkaar te relateren. In het vervolg zal er met logaritme de natuurlijke logaritme bedoeld worden.

Er moet goed op de imaginaire delen van de logaritmen gelet worden. Dat komt doordat imaginaire delen van complexe getallen, die met elkaar vermenigvuldigd worden, kunnen combineren en een reële bijdrage kunnen geven. Als het reële deel van het argument negatief is, heeft een logaritme een imaginair deel. Een logaritme van een complex getal x met een negatief reëel deel kan dan worden geschreven als

$$\log(x) = \log(-x) \pm i\pi \quad (61)$$

Hierbij komt $i\pi$ overeen met een complexe fasefactor. Het teken van deze fasefactor hangt af van het teken van het imaginaire deel van x . Door het imaginaire deel van bepaalde logaritmen uit te werken, is de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede verder te vereenvoudigen.

Dit is bijvoorbeeld te zien door de term $\log((m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2 - i\delta)/(m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2 - i\delta))$ uit te werken, waarbij uiteindelijk de limiet $\delta \rightarrow 0$ wordt genomen. Het argument binnen deze logaritme is om te schrijven, waarbij de termen δ^2 weggelaten zijn omdat δ uiteindelijk 0 wordt:

$$\begin{aligned} \frac{m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2 - i\delta}{m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2 - i\delta} &= \frac{(m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2 - i\delta)(m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2 + i\delta)}{(m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2 - i\delta)(m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2 + i\delta)} \\ &= \frac{m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2}{m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2} + i\delta \frac{2m_{\bar{g}}^2}{(m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2)^2} \end{aligned} \quad (62)$$

Aangezien deze term binnen een logaritme staat, krijg je een extra imaginaire bijdrage als $m_{\bar{q}} < m_{\bar{g}}$.

Om te kijken welk teken deze imaginaire bijdrage moet hebben, moet er naar het teken van $i\delta$ gekeken worden. Als het reële deel van het argument binnen de logaritme negatief is, is het imaginaire deel altijd positief. Dat betekent dat vergelijking 62 op de volgende manier geschreven kan worden:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2 - i\delta}{m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2 - i\delta}\right) &= \log\left(\frac{m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2}{m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2} + i\delta\right) \\ &= \begin{cases} \log\left(\frac{m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2}{m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2}\right) & \text{als } m_{\bar{q}} > m_{\bar{g}} \\ \log\left(\frac{m_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{g}}^2}{m_{\bar{q}}^2 - m_{\bar{g}}^2}\right) + i\pi & \text{als } m_{\bar{q}} < m_{\bar{g}} \end{cases} \end{aligned} \quad (63)$$

Hierbij is de term achter $i\delta$ weggelaten, omdat voor $\delta \rightarrow 0$ alleen het teken van het imaginaire deel van belang is. Voor het geval dat $m_{\bar{q}} < m_{\bar{g}}$ is de oorspronkelijke logaritme gelijk aan een logaritme van een positief reëel getal en een goed gedefinieerde complexe fasefactor.

Naast logaritmen komen ook dilogarithmen [6] voor in bepaalde integralen. Een dilogaritme wordt genoteerd als $\text{Li}_2(x)$ en is gedefinieerd als

$$\text{Li}_2(x) \equiv \int_x^0 \frac{\log(1-t)}{t} dt \quad (64)$$

Door geschikte identiteiten te gebruiken, kunnen bepaalde dilogarithmen in elkaar worden omgeschreven [7]. Aan de definitie van de dilogaritme is te zien dat er een imaginaire bijdrage is als $x > 1$, omdat het argument binnen de logaritme dan negatief wordt. Verder kunnen de imaginaire delen van de dilogarithmen analoog aan vergelijkingen 62 en 63 worden uitgewerkt.

Daarnaast kunnen nog een aantal identiteiten worden gebruikt om bepaalde termen met massa's om te schrijven en aan elkaar te relateren. In bijlage 3 staat een overzicht van een aantal vereenvoudigingen in de code van de berekening.

5 Het verifiëren van de resultaten

De uitdrukking voor het virtuele deel van de botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel is nu bekend. Deze uitdrukking is van $\mathcal{O}(\beta_g)$ en bestaat uit een constante term en een term die vermenigvuldigd wordt met β_g .

Om te kijken of de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede klopt, kunnen er een aantal dingen gecontroleerd worden. Ten eerste mag de differentiële werkzame doorsnede niet opblazen bij de kinematische drempel (zie 4.2.1). Dat is na te gaan door te kijken of de termen met $1/\beta_g^2$, die overblijven na het expanderen van de Mandelstamvariabelen, wegvallen na het expanderen van de integralen. Dit blijkt het geval te zijn.

Daarnaast moeten de ε -polen gecontroleerd worden. Hiervoor wordt de virtuele schaalfunctie f^{V+S} berekend. Deze schaalfunctie is het virtuele deel van de botsingsdoorsnede, waarbij er nog een aantal termen zijn uitgedeeld [8]. Verder worden de termen die betrekking hebben op de straling van laag-energetische gluonen (die ook ε -polen bevatten) van het reële deel van de botsingsdoorsnede afgetrokken en bij het virtuele deel van de botsingsdoorsnede opgeteld. De laag-energetische gluonen hebben namelijk een zodanig lage energie dat ze in de praktijk niet waargenomen kunnen worden. Uiteindelijk mogen er in de virtuele schaalfunctie geen negatieve machten van ε voorkomen, omdat ε uiteindelijk 0 wordt (zie paragraaf 3.2) en de totale botsingsdoorsnede anders zou opblazen. Met behulp van de vereenvoudigingen uit paragraaf 4.3 blijken de ε -polen in de uitdrukking voor f^{V+S} weg te vallen.

Daarnaast moet de Coulomb-term kloppen. De Coulomb-term is gedefinieerd als de term in de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede die niet vermenigvuldigd wordt met β_g . Het is al bekend wat deze term zou moeten zijn (vergelijking 55 van [8]). De Coulomb-term in de eerste orde correctie van de botsingsdoorsnede komt inderdaad overeen met de Coulomb-term die al bekend is.

In de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede moet ook de term die vermenigvuldigd wordt met β_g kloppen. Dit is na te gaan door het numerieke programma PROSPINO te gebruiken [8]. Dit programma berekent numeriek de virtuele schaalfunctie f^{V+S} . Door de Coulomb-term van de schaalfunctie af te trekken en te delen door β_g , wordt de $\mathcal{O}(\beta_g)$ -term verkregen. Dit berekent PROSPINO in termen van η . Deze variabele is voor gluinopproductie gedefinieerd als

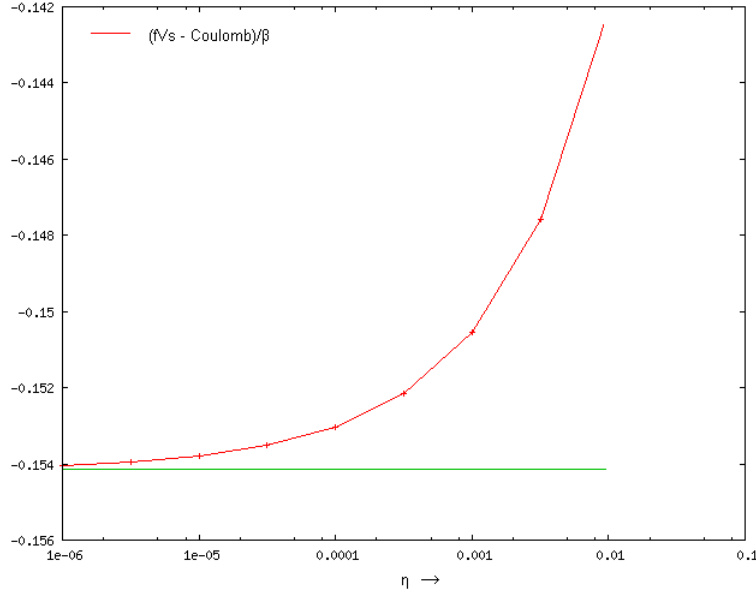
$$\eta \equiv \frac{s}{4m_g^2} - 1 \quad (65)$$

en door de Mandelstamvariabele s in termen van β_g in te vullen (vergelijking 31) volgt

$$\eta = \frac{\beta_g^2}{1 - \beta_g^2} \sim \beta_g^2 \quad (66)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat β_g bij de kinematische drempel klein is.

PROSPINO kan de gezochte uitdrukking niet bij $\eta = 0$ berekenen. Daarom moet er gekeken worden of de uitkomst die PROSPINO geeft voor kleine η convergeert naar de waarde die uit de analytische berekening volgt. Door plots te maken voor verschillende combinaties van de gluinomassa $m_{\tilde{g}}$ en de squark-massa $m_{\tilde{q}}$ is dit na te gaan. Een plot bij $m_{\tilde{g}} = 500$ GeV en $m_{\tilde{q}} = 200$ GeV is weergegeven in figuur 7.

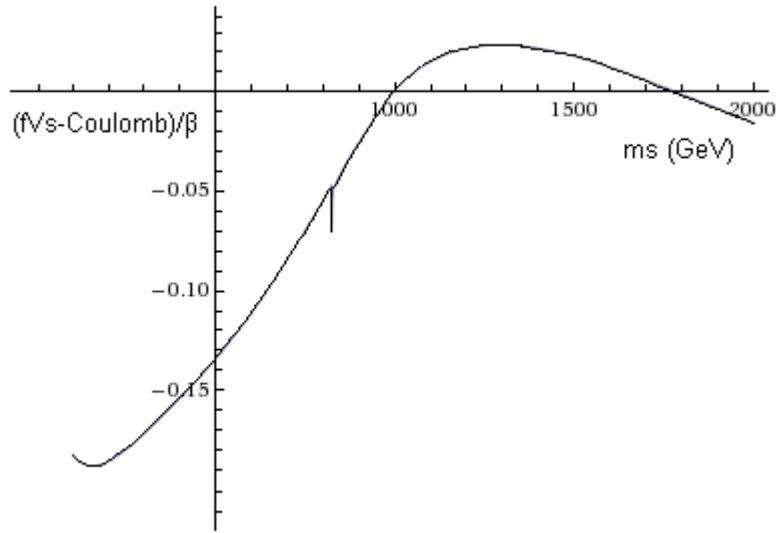


Figuur 7: De uitkomst van PROSPINO (rode lijn) vergeleken met de waarde die uit de berekening volgt (groene lijn). Hierbij is $m_{\tilde{g}} = 500$ GeV en $m_{\tilde{q}} = 200$ GeV.

Zoals te zien in figuur 7, convergeert de waarde die PROSPINO geeft netjes naar de waarde die uit de analytische berekening volgt. Dit geldt ook voor andere combinaties van massa's en dat betekent dat de berekening klopt.

6 Resultaten

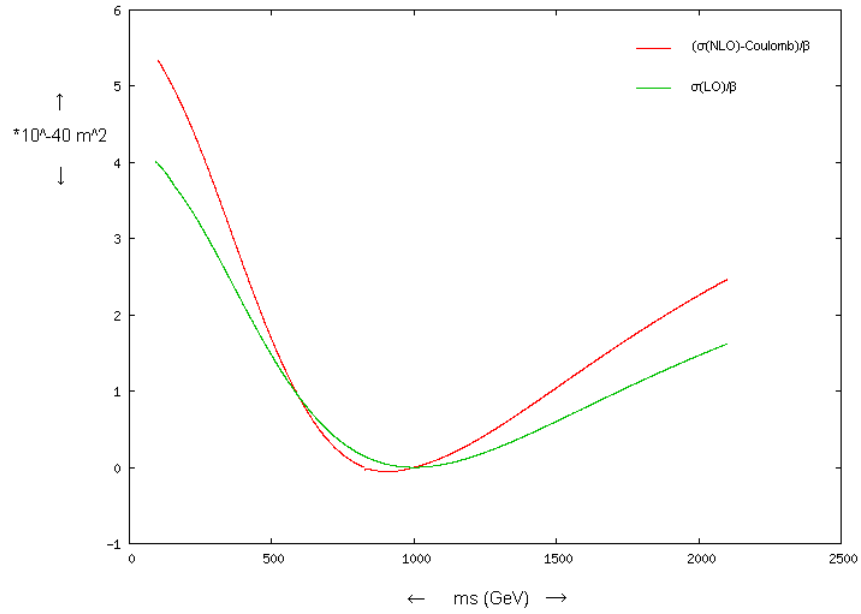
Om te kijken hoe de uitdrukking voor het virtuele deel van de botsingsdoorsnede zich gedraagt, kan de grootheid $(f^{V+S}-Coulomb)/\beta_g$ worden berekend voor verschillende combinaties van massa's. Hierbij is de Coulomb-term van de virtuele schaalfunctie f^{V+S} (zoals gedefinieerd in hoofdstuk 5) afgetrokken en is het geheel gedeeld door β_g . In figuur 8 is $(f^{V+S}-Coulomb)/\beta_g$ uitgezet tegen de squarkmassa bij een vaste gluinomassa $m_{\tilde{g}} = 1000$ GeV.



Figuur 8: De grootheid $(f^{V+S}-Coulomb)/\beta_g$ in termen van de squarkmassa m_s bij $m_{\tilde{g}} = 1000$ GeV

In figuur 8 is te zien dat de bijdrage van de grootheid $(f^{V+S}-Coulomb)/\beta_g$ voor de meeste waarden van de squarkmassa een negatieve bijdrage geeft aan de botsingsdoorsnede. Verder is er een kleine piek te zien. Dit komt van het feit dat de levensduur van het gluino in de berekening oneindig is genomen, wat in de praktijk natuurlijk niet het geval is. Bij een eindige levensduur van het gluino zou deze piek moeten afvlakken.

Om de volledige $\mathcal{O}(\beta_g)$ -term te krijgen, moet het reële deel van de eerste orde correctie van de botsingsdoorsnede bij het virtuele deel opgeteld worden. Deze volledige $\mathcal{O}(\beta_g)$ -term staat in figuur 9, waarbij de Coulomb-term en divergerende logaritmen (afkomstig van de reële straling van gluonen) weggelaten zijn. Dit kan worden vergeleken met de $\mathcal{O}(\beta_g)$ -term van de botsingsdoorsnede op laagste orde. Hierbij is voor de gluinomassa $m_{\tilde{g}} = 1000$ GeV genomen en is de squarkmassa gevarieerd.



Figuur 9: De botsingsdoorsnede op laagste orde en de eerste orde correctie hierop in termen van de squarkmassa m_s bij $m_{\tilde{g}} = 1000$ GeV

In figuur 9 is te zien dat de botsingsdoorsnede op laagste orde van dezelfde orde grootte is als de eerste orde correctie hierop zonder de Coulomb-term en divergerende logaritmen. De eerste orde correctie geeft dus een significante bijdrage aan de totale botsingsdoorsnede.

7 Conclusie

In deze scriptie is de uitdrukking voor de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede voor het proces $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ berekend. Dit is gedaan bij de kinematische drempel. Hiervoor is de botsingsdoorsnede geëxpandeerd in termen van de drempelvariabele β_g .

Om de botsingsdoorsnede bij de kinematische drempel te berekenen zijn eerst de Mandelstamvariabelen en integralen geëxpandeerd in β_g . Daarna is het matrixelement omgerekend naar de botsingsdoorsnede. Het eindresultaat is een uitdrukking voor de botsingsdoorsnede tot $\mathcal{O}(\beta_g)$. Er is gecontroleerd of de uitdrukking voor de botsingsdoorsnede klopt. Uiteindelijk is de bijdrage van de eerste orde correctie op de botsingsdoorsnede vergeleken met de botsingsdoorsnede op laagste orde. De eerste orde correctie blijkt een significante bijdrage te leveren aan de totale botsingsdoorsnede.

Het bepalen van de complete NNLL-correctie is de volgende stap in de berekening. Daarna moet deze correctie gecombineerd worden met de NNLL-correcties van andere supersymmetrische processen. De NNLL-correcties kunnen worden gebruikt om meetresultaten in deeltjesversnellers beter te kunnen interpreteren.

8 Referenties

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter, mei 2011.
- [2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Supersymmetry>, mei 2011.
- [3] http://cepa.fnal.gov/psm/simulation/mcgen/lund/pythia_manual/pythia6.3/pythia6301/node114.html, mei 2011.
- [4] http://nl.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider, mei 2011.
- [5] <http://www.nikhef.nl/~form/>, mei 2011.
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html>, mei 2011.
- [7] <http://functions.wolfram.com/ZetaFunctionsandPolylogarithms/PolyLog2/17/01/01/>, mei 2011.
- [8] W. Beenakker, R. Hopker, M. Spira, and P.M. Zerwas. Squark and gluino production at hadron colliders. *Nucl.Phys.*, B492:51–103, 1997.
- [9] Wim Beenakker, Silja Brensing, Michael Krämer, Anna Kulesza, Eric Laenen, and Irene Niessen. To be published.
- [10] Wim Beenakker, Silja Brensing, Michael Krämer, Anna Kulesza, Eric Laenen, and Irene Niessen. Soft-gluon resummation for squark and gluino hadroproduction. 2009.
- [11] W.J.P. Beenakker. *Dictaat bij het college Kwantummechanica 2*. jaargang 2010-2011.
- [12] S. Catani and L. Trentadue. Resummation of the qcd perturbative series for hard processes. *Nuclear Physics B*, 327(2):323 – 352, 1989.
- [13] M. Czakon and A. Mitov. On the Soft-Gluon Resummation in Top Quark Pair Production at Hadron Colliders. *Phys. Lett.*, B680:154–158, 2009.
- [14] R Keith Ellis and Giulia Zanderighi. Scalar one-loop integrals for qcd. *Journal of High Energy Physics*, 2008(02):27, 2007.
- [15] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2008.

9 Bijlagen

9.1 De expansies van de Mandelstamvariabelen in β_g

Hieronder staat de code voor het expanderen van de Mandelstamvariabelen in β_g . In FORM gebruik je een id-statement om een identiteit te definiëren en een repeat id-statement om alle machten van een variabele te vervangen. De definities die hier gebruikt worden, zijn terug te vinden in paragraaf 4.1. In de code wordt met ms de squarkmassa $m_{\bar{q}}$ bedoeld en m_p is gedefinieerd als $m_p^2 = m_g^2 + m_{\bar{q}}^2$.

```
id t1=- (mp^2)+2*Cos(theta)*mg^2*betag-2*mg^2*betag^2+2*Cos(theta)*mg^2*
betag^3-2*mg^2*betag^4;
```

```
repeat id t1^-1=- (mp^-2)-2*betag*Cos(theta)*mg^2*mp^-4-2*betag^2*(2*(Cos(theta))^2
*mg^4-mg^4-mg^2*ms^2)*mp^-6-2*betag^3*(4*(Cos(theta))^3*mg^6-3*Cos(theta)*mg^6
-2*Cos(theta)*mg^4*ms^2+Cos(theta)*mg^2*ms^4)*mp^-8-2*betag^4
*(8*(Cos(theta))^4*mg^8-8*(Cos(theta))^2*mg^8-4*(Cos(theta))^2*mg^6*ms^2
+4*(Cos(theta))^2*mg^4*ms^4+mg^8+mg^6*ms^2-mg^4*ms^4-mg^2*ms^6)*mp^-10;
```

```
id tg=-2*mg^2+2*Cos(theta)*mg^2*betag-2*mg^2*betag^2+2*Cos(theta)*mg^2*betag^3
-2*mg^2*betag^4;
```

```
repeat id tg^-1=(2*mg^2)^-1*(-1-Cos(theta)*betag-((Cos(theta))^2-1)*betag^2+(Cos(theta)
-(Cos(theta))^3)*betag^3+((Cos(theta))^2-(Cos(theta))^4)*betag^4);
```

```
id u1=- (mp^2)-2*Cos(theta)*mg^2*betag-2*mg^2*betag^2-2*Cos(theta)*mg^2*
betag^3-2*mg^2*betag^4;
```

```
repeat id u1^-1=- (mp^-2)+2*betag*Cos(theta)*mg^2*mp^-4-2*betag^2*(2*(Cos(theta))^2
*mg^4-mg^4-mg^2*ms^2)*mp^-6+2*betag^3*(4*(Cos(theta))^3*mg^6-3*Cos(theta)*mg^6
-2*Cos(theta)*mg^4*ms^2+Cos(theta)*mg^2*ms^4)*mp^-8-2*betag^4*(8*(Cos(theta))^4
*mg^8-8*(Cos(theta))^2*mg^8-4*(Cos(theta))^2*mg^6*ms^2+4*(Cos(theta))^2*mg^4
*ms^4+mg^8+mg^6*ms^2-mg^4*ms^4-mg^2*ms^6)*mp^-10;
```

```
id ug=-2*mg^2-2*Cos(theta)*mg^2*betag-2*mg^2*betag^2-2*Cos(theta)*mg^2*betag^3
-2*mg^2*betag^4;
```

```
repeat id ug^-1=(2*mg^2)^-1*(-1+Cos(theta)*betag-((Cos(theta))^2-1)*betag^2-(Cos(theta)
-(Cos(theta))^3)*betag^3+((Cos(theta))^2-(Cos(theta))^4)*betag^4);
```

```
id s=4*mg^2*(1+betag^2+betag^4);
```

```
repeat id s^-1=(1-betag^2)*(4*mg^2)^-1;
```

```
id 1/[s-4*mg^2]=1/(4*mg^2*betag^2)-1/4/mg^2;
```

9.2 De uitwerking van de integralen

Hieronder staat de code voor het uitwerken van de integralen. Hierbij geeft een vraagteken bij een massa aan dat er elke massa ingevuld kan worden. De definities die in deze code gebruikt worden, zijn terug te vinden in paragraaf 4.1, 4.2.2 en 4.3. In de code wordt met $Polylog(2, x)$ de dilogaritme $Li_2(x)$ bedoeld. Verder zijn nog de volgende definities gebruikt:

- $iSn = \frac{i}{16\pi^2}$
- $\bar{s} = s + i\delta, \bar{t} = t + i\delta, \dots, \bar{m}_g^2 = m_g^2 + i\delta$ enz.
- $\beta(x, y, z) = \sqrt{1 - \frac{4yz}{x^2 + i\delta - (y-z)^2}}$
- $X(x, y, z) = \frac{\beta(x, y, z) - 1}{\beta(x, y, z) + 1}$

Uiteindelijk wordt de uitwerking van de integralen:

$$\begin{aligned} id\ D0(p2, p1, -g2, mg, 0, mg, ms) = & -iSn * (4 * mg^2)^{-1} * (-(betag * mp^2)^{-1} \\ & + 2 * Cos(theta) * mg^2 * mp^{-4} + 2 * mg^2 * betag * ((1 - 2 * (Cos(theta))^2)^* \\ & mg^2 + ms^2) * mp^{-6}) * (2 * Pi * i_{-} * eps^{-1} - PolyLog(2, -ms^2 / mg^2) - \\ & (Log(ms^2 / mg^2) + i_{-} * Pi) * Log(1 + ms^2 / mg^2) - PolyLog(2, -mg^2 / ms^2) - \\ & -(Log(mg^2 / ms^2) + i_{-} * Pi) * Log(1 + mg^2 / ms^2) + (1/2)^* \\ & (Log(ms^2 / mg^2))^2 + (5/6) * Pi^2 + 2 * Pi * i_{-} * Log(2 * betag) + 2 * Pi * i_{-} * \\ & Log(mp^2 * mg^{-1} * ms^{-1}) + betag * (-4 / eps - (Log(ms^2 / mg^2) + i_{-} * Pi) * \\ & (-2) * (ms^2 / mg^2) * (1 + ms^2 / mg^2)^{-1} - (Log(mg^2 / ms^2) + i_{-} * Pi) * (-2) * \\ & (mg^2 / ms^2) * (1 + mg^2 / ms^2)^{-1} - 2 * i_{-} * Pi - 4 - 4 \\ & * Log(mp^2 * mg^{-1} * ms^{-1}) + 4 * i_{-} * Pi * Cos(theta) * mg^2 * mp^{-2})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id\ D0(p2, p1, -g1, mg, 0, mg, ms) = & -iSn * (4 * mg^2)^{-1} * (-(betag * mp^2)^{-1} \\ & - 2 * Cos(theta) * mg^2 * mp^{-4} + 2 * mg^2 * betag * ((1 - 2 * (Cos(theta))^2)^* \\ & mg^2 + ms^2) * mp^{-6}) * (2 * Pi * i_{-} * eps^{-1} - PolyLog(2, -ms^2 / mg^2) - \\ & (Log(ms^2 / mg^2) + i_{-} * Pi) * Log(1 + ms^2 / mg^2) - PolyLog(2, -mg^2 / ms^2) - \\ & -(Log(mg^2 / ms^2) + i_{-} * Pi) * Log(1 + mg^2 / ms^2) + (1/2)^* \\ & (Log(ms^2 / mg^2))^2 + (5/6) * Pi^2 + 2 * Pi * i_{-} * Log(2 * betag) + 2 * Pi * i_{-} * \\ & Log(mp^2 * mg^{-1} * ms^{-1}) + betag * (-4 / eps - (Log(ms^2 / mg^2) + i_{-} * Pi) * (-2) * \\ & (ms^2 / mg^2) * (1 + ms^2 / mg^2)^{-1} - (Log(mg^2 / ms^2) + i_{-} * Pi) * (-2) * \\ & (mg^2 / ms^2) * (1 + mg^2 / ms^2)^{-1} - 2 * i_{-} * Pi - 4 - 4 \\ & * Log(mp^2 * mg^{-1} * ms^{-1}) - 4 * i_{-} * Pi * Cos(theta) * mg^2 * mp^{-2})); \end{aligned}$$

$$id\ D0(p2, p1, -g2, m1?, m2?, m3?, m4?) = D0(p2, p1, -g1, m1, m2, m3, m4);$$

$$id\ D0(p2, p1, -g1, m1?, m2?, m3?, m4?) = (2 * mg^2 - m1^2 + 2 * m2^2 - m3^2)^{-1} * (C0(p1, -g1, m2, m1, m4) - 2 * C0(g1, g2, m1, m4, m3) + C0(p1, -g1, m2, m3, m4));$$

$$id\ D0(p2, -g2, p1, m1?, m2?, m3?, m4?) = D0(p2, -g1, p1, m1, m2, m3, m4);$$

$$\text{id } D0(p2, -g1, p1, m1?, m2?, m3?, m4?) = (-m1^2 + m2^2 + m3^2 - m4^2)^{-1} * \\ (C0(p1, -g1, m1, m2, m3) - C0(p1, -g1, m2, m1, m4) - C0(p1, -g1, m3, m4, m1) + \\ C0(p1, -g1, m4, m3, m2));$$

$$\text{id } C0(p1, -g1, m1?, m2?, m3?) = C0(-g1, p1, m3, m2, m1);$$

$$\text{id } C0(p1, p2, mg, 0, mg) = Pi * Sn^*(2 - i_{-} * eps * Pi + eps * Log(4) + 2 * eps \\ * Log(beta)) * (4 * eps * mg^2 * beta)^{-1 + i_{-} * (1 + eps)} * Sn^*(eps * mg^2)^{-1};$$

$$\text{id } C0(p1, p2, m1?, m2?, m1?) = (mg^2 - m1^2 + m2^2)^{-1} * (B0(p1, m1, m2) \\ - B0(g1 + g2, m1, m1));$$

$$\text{id } B0(p1, ms, 0) = B0(p1, 0, ms);$$

$$\text{id } B0(p1, mt, ms) = B0(p1, ms, mt);$$

$$\text{id } C0(g1, g2, 0, 0, 0) = iSn^*(4 * mg^2)^{-1} * (4/eps^2 + (2/eps) * (Log(4) - i_{-} * Pi) \\ + (1/2) * (Log(4) - i_{-} * Pi)^2 - Pi^2/12);$$

$$\text{id } C0(g1, g2, m1?, m2?, m1?) = iSn^*(4 * mg^2)^{-1} * (PolyLog(2, 1 - m2^2 \\ * m1^{-2} * X(4 * mg^2, m1, m1)) + PolyLog(2, 1 - m2^2 * m1^{-2} * \\ X(4 * mg^2, m1, m1)^{-1}) - 2 * PolyLog(2, 1 - m2^2 * m1^{-2}) + \\ (Log(X(4 * mg^2, m1, m1)))^2);$$

$$\text{id } C0(-g1, p2, m1?, m2?, m3?) = C0(-g1, p1, m1, m2, m3);$$

$$\text{id } C0(-g2, p1, m1?, m2?, m3?) = C0(-g1, p1, m1, m2, m3);$$

$$\text{id } C0(-g2, p2, m1?, m2?, m3?) = C0(-g1, p1, m1, m2, m3);$$

$$\text{id } C0(-g1, p1, ms, mg, 0) = iSn^*(-2 * mg^2)^{-1} * (Pi^2/6 - \\ PolyLog(2, -mg^2 * ms^{-2}) - PolyLog(2, 1 - mg^2/ms^2) + \\ Log(ms^2/mg^2) * Log(1 + mg^2 * ms^{-2}));$$

$$\text{id } C0(-g1, p1, mg, ms, 0) = iSn^*(-2 * mg^2)^{-1} * (Pi^2/12 + \\ PolyLog(2, (-3 * mg^2 + ms^2) * (-2 * mg^2)^{-1 + i_{-} * delta}) + \\ PolyLog(2, 1 - mp^2 * (2 * ms^2)^{-1}) + Log(1 - mp^2 * (2 * ms^2)^{-1} \\ - i_{-} * delta) * Log(mp^2 * (2 * ms^2)^{-1}) - (1/2) * (Log(ms^2/mg^2))^2 \\ + Log(ms^2/mg^2) * Log((ms^2 - mg^2)/(2 * mg^2) - i_{-} * delta));$$

$$\begin{aligned}
id\ C0(-g1,p1,0,0,ms) &= iSn^{*}(-2*mg^2)^{-1}*((2/eps)*Log(mp^2* \\
&(ms^2-mg^2)^{-1+i_*delta})+PolyLog(2,-mg^2*ms^{-2})+ \\
&PolyLog(2,1-mg^2*ms^{-2})+Log((ms^2-mg^2)/ms^{2-i_*delta})* \\
&Log(mg^2/ms^2)-Pi^2/6+(Log(1+mg^2*ms^{-2}))^2- \\
&(Log((ms^2-mg^2)/ms^{2-i_*delta}))^2+Log(ms^2*mg^{-2})* \\
&Log(mp^2*(ms^2-mg^2)^{-1+i_*delta});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id\ C0(-g1,p1,0,0,mg) &= iSn^{*}(-2*mg^2)^{-1}*(2/eps^2+(2/eps)*Log(2) \\
&+(Log(2))^2-Pi^2/24);
\end{aligned}$$

$$id\ A0(m1?) = iSn^{*}m1^2*(-2/eps+1-Log(m1^2/mg^2));$$

$$id\ B0(p1-g2,0,m1?) = B0(p1-g1,0,m1);$$

$$\begin{aligned}
id\ B0(p1-g1,0,m1?) &= iSn^{*}(-2/eps+2-(-mg^2-m1^2)*(-mg^2)^{-1}* \\
&Log((m1^2+mg^2)/m1^2)-Log(m1^2/mg^2));
\end{aligned}$$

$$id\ B0(g1+g2,mg,mg) = iSn^{*}(-2/eps+2);$$

$$id\ B0(g1+g2,0,0) = iSn^{*}(-2/eps+2-(Log(4)-i_*Pi));$$

$$\begin{aligned}
id\ B0(g1+g2,m1?,m1?) &= iSn^{*}(-2/eps+2+beta(4*mg^2,m1,m1) \\
&*Log(X(4*mg^2,m1,m1))-Log(m1^2/mg^2));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id\ B0(p1,ms,mt) &= iSn^{*}(-2/eps+2-(mg^2+ms^2-mt^2)* \\
&(2*mg^2)^{-1}*Log(ms^2/mg^2)-(mg^2+mt^2-ms^2)* \\
&(2*mg^2)^{-1}*Log(mt^2/mg^2)+mg^{-2}*(mg^2-(ms-mt)^2) \\
&*beta(mg^2,ms,mt)*Log(X(mg^2,ms,mt)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id\ B0(p1,0,ms) &= iSn^{*}(-2/eps+2-(mg^2-ms^2)*(mg^2)^{-1} \\
&*Log((ms^2-mg^2)*ms^{-2-i_*delta})-Log(ms^2/mg^2));
\end{aligned}$$

$$id\ B0(p1,0,mg) = iSn^{*}(-2/eps+2);$$

$$\begin{aligned}
id\ B0(g1,ms,mg) &= iSn^{*}(-2/eps+1-ms^2*(ms^2-mg^2)^{-1} \\
&*Log(ms^2/mg^2));
\end{aligned}$$

$$id\ B0(ps,0,ms) = iSn^{*}(-2/eps+2-Log(ms^2/mg^2));$$

$$\begin{aligned}
id\ B0(ps,0,mg) &= iSn^{*}(-2/eps+2-(ms^2-mg^2)*ms^{-2}* \\
&Log((mg^2-ms^2)*mg^{-2-i_*delta}));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id \ B0p(p1,mt,ms) &= iSn * ((mt^2 - ms^2) * (2 * mg^4)^{-1} * \\
&Log(mt^2 / ms^2) + (mt - ms)^2 * mg^{-4} * beta(mg^2, mt, ms) \\
&* Log(X(mg^2, mt, ms)) - 1 / mg^2 + 2 * mt * ms * (mg^2 * \\
&beta(mg^2, mt, ms))^{-1} * Log(X(mg^2, mt, ms)) * \\
&(mg^2 - (mt - ms)^2)^{-1});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id \ B0p(p1,0,ms) &= iSn * (-1 - (ms^2 / mg^2) * Log((ms^2 - mg^2) * ms^{-2} \\
&- i_{\delta})) / mg^2;
\end{aligned}$$

$$id \ B0p(p1,0,mg) = iSn * (1 / eps - 1) / mg^2;$$

$$\begin{aligned}
id \ B0p(g1,mg,ms) &= iSn * ((1/2) * mp^2 - mg^2 * ms^2 * (mg^2 - ms^2)^{-1} \\
&* Log(mg^2 / ms^2)) / (mg^2 - ms^2)^2;
\end{aligned}$$

9.3 Vereenvoudigingen

In deze bijlage zijn vereenvoudigingen uit de code van de berekening te vinden. De methodes die gebruikt zijn om deze vereenvoudigingen af te leiden, zijn uitgelegd in paragraaf 4.3. In de code wordt met $Polylog(2, x)$ de dilogaritme $Li_2(x)$ bedoeld. Verder zijn ook een aantal definities uit bijlage 8.1 gebruikt en is mm gedefinieerd als $mm^2 = m_g^2 - m_q^2$.

```

repeat id  $ms^2/mg^2=mp^2/mg^2-1$ ;

id  $1/(1+mg^2/ms^2)=ms^2/mp^2$ ;

id  $1/(1+ms^2/mg^2)=mg^2/mp^2$ ;

id  $1/(-mg^2+ms^2)=-1/mm^2$ ;

id  $mm^2=mg^2-ms^2$ ;

repeat id  $mg^2/mm^2=1+ms^2/mm^2$ ;

repeat id  $ms^2/mm^2=mg^2/mm^2-1$ ;

repeat id  $ms^2/mp^2=1-mg^2/mp^2$ ;

repeat id  $mg^2/mp^2=1-ms^2/mp^2$ ;

repeat id  $ms^2/mp^2/mm^2=1/2/mm^2-1/2/mp^2$ ;

repeat id  $1/(-mt^2+mg^2+ms^2)/mp^2=-1/mt^2*(1/mp^2-1/(-mt^2+mg^2+ms^2))$ ;

id  $mm^4/(mt^2+mg^2-ms^2)=1-mt^2/(mt^2+mg^2-ms^2)$ ;

repeat id  $mt^2/(-mt^2+mg^2+ms^2)=-1+(mg^2+ms^2)/(-mt^2+mg^2+ms^2)$ ;

repeat id  $mm^2/(mt^2+mg^2-ms^2)=1-mt^2/(mt^2+mg^2-ms^2)$ ;

repeat id  $ms^2/(mt^2+mg^2-ms^2)/mp^2=(1/(mt^2+mg^2-ms^2)-1/mp^2+mt^2/mp^2/(mt^2+mg^2-ms^2))/2$ ;

repeat id  $mt^2/(mt^2+mg^2-ms^2)=1-(mg^2-ms^2)/(mt^2+mg^2-ms^2)$ ;

id  $1/(-mt^2+mg^2-2*ms*mt-ms^2)=1/(-mt^2-2*ms*mt+mm^2)$ ;

```

id $\text{Log}(mg^2/ms^2) = -\text{Log}(ms^2/mg^2)$;
repeat id $(\text{Log}(mg^2/ms^2))^2 = (\text{Log}(ms^2/mg^2))^2$;
id $\text{Log}(mg^{-2}*mm^2 - I*\delta) = \text{Log}(-mg^{-2}*mm^2 + I*\delta) - I*\text{Pi}$;
id $\text{PolyLog}(2, -mg^2*ms^{-2}) = -\text{PolyLog}(2, -ms^2*mg^{-2}) - (1/2) * (\text{Log}(mg^2*ms^{-2}))^2 - \text{Pi}^2/6$;
id $\text{PolyLog}(2, 1 - ms^2/mg^2) = -\text{PolyLog}(2, 1 - mg^2/ms^2) - (1/2) * (\text{Log}(ms^2/mg^2))^2$;
id $\text{PolyLog}(2, 1 + ms^2*mg^{-2}) = -\text{PolyLog}(2, -ms^2/mg^2) - (\text{Log}(ms^2/mg^2) + I*\text{Pi}) * \text{Log}(ms^2/mg^2) + \text{Pi}^2/6$;