

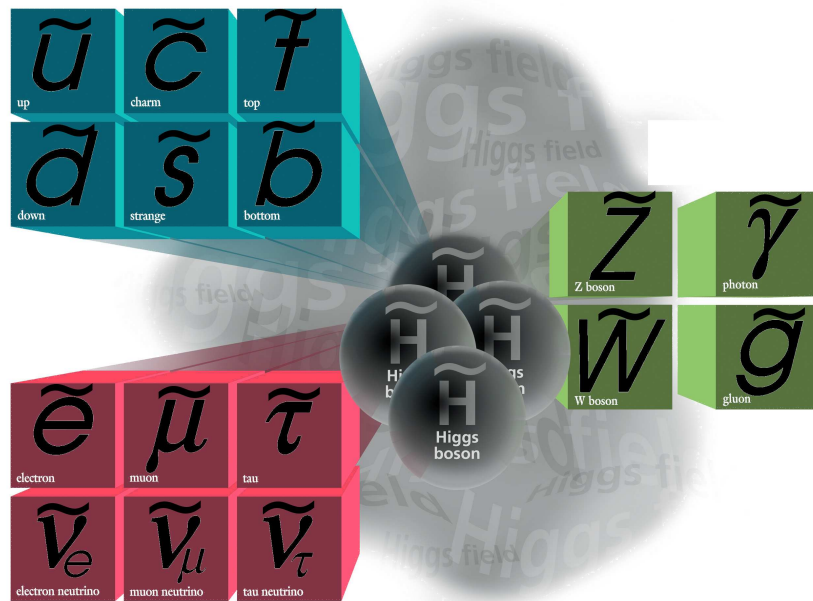
Gluinoproductie in een deeltjesversneller

Tim Janssen

29 augustus 2011

Dr. W.J.P. Beenakker

Drs. I. Niessen



Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
1.1	Motivatie	3
1.2	Indeling	3
2	Supersymmetrie	4
3	De botsingsdoorsnede	5
3.1	De botsingsdoorsnede met kwantumveldentheorie	5
3.2	Mandelstamvariabelen	7
3.3	Hogere-orde Feynmandiagrammen	8
3.3.1	Virtuele correcties	8
3.4	Berekening van de botsingsdoorsnede	9
3.4.1	Botsingsdoorsnede van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces	9
4	Hogere-orde kwantumcorrectie	11
5	Het nemen van de thresholdlimiet	12
5.1	Expanderen van de Mandelstamvariabelen	13
5.2	Expanderen van de scalaire integralen	13
5.2.1	Imaginaire termen	13
5.2.2	Divergerende integralen	14
5.2.3	Omschrijven van integralen	14
5.2.4	Vereenvoudigen van de integralen	15
5.3	Numerieke resultaten	16
6	Kleurstructuren	18
6.1	Speciale unitaire groep	18
6.2	Reducibele en irreducibele representaties	20
6.3	Kleurstructuren van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces	20
6.4	Kleurontbinding van de botsingsdoorsnede	22
6.5	Numerieke resultaten	23
7	Controle van de berekening	24
8	Conclusie	25
A	Mandelstamvariabelen	26
B	Gebruikte Taylor-expansies	27
C	Kleurontbinding van de botsingsdoorsnede	30
C.1	Dimensie van de basisstructuren	30
C.2	Kleurontbinding van het matrixelement	31

Samenvatting

In deze scriptie zal de botsingsdoorsnede van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ gluinopproductieproces uitgerekend worden met behulp van storingsrekening. Aangezien de next-to-leading-order (NLO) en next-to-next-to-leading-order (NNLO) correcties langzaam convergeren, wordt in deze scriptie een berekening ten behoeve van de next-to-next-to-leading-logarithmic (NNLL) correctie uitgevoerd. De berekening van de botsingsdoorsnede wordt in deze scriptie uitgevoerd op threshold. In deze scriptie zullen ook de kleurstructuren die in de botsingsdoorsnede van het gluinopproductieproces voorkomen geanalyseerd worden. Deze kleurstructuren zullen worden ontbonden in irreducibele representaties. Uit deze scriptie volgt dat de botsingsdoorsnede groter is dan werd verwacht op basis van de eerste-orde benadering. Dit impliceert dat als supersymmetrische deeltjes bestaan de waarschijnlijkheid dat deze gevormd worden in een hadronenversneller groter is.

1 Inleiding

1.1 Motivatie

Met het standaardmodel is het mogelijk om de krachten en deeltjes, die alle tot nu toe bekende materie vormen, te beschrijven. Het standaardmodel is een theorie die in overeenstemming is met zowel de kwantummechanica als de relativiteitstheorie. Toch is het standaardmodel geen allesbeschrijvende theorie van fundamentele interacties, hoofdzakelijk omdat het de zwaartekracht buiten beschouwing laat. Daarnaast hebben astrofysici het aannemelijk gemaakt dat er nog materie moet bestaan waarvoor het standaardmodel geen verklaring geeft, namelijk donkere materie. Dit is stabiele materie die geen licht uitstraalt (en dus niet koppelt aan het foton). Het standaardmodel geeft voor deze materie geen verklaring en dus zal er een uitbreiding van dit model moeten komen. Een mogelijke theorie die het bestaan van donkere materie zou kunnen verklaren is supersymmetrie. Als supersymmetrie bestaat dan ligt het in de lijn der verwachtingen dat met de LHC¹ het bestaan van supersymmetrische deeltjes aangetoond kan worden. Bij het interpreteren van de resultaten is het belangrijk de botsingsdoorsnede van supersymmetrische deeltjes te kennen. Dit is een maat van waarschijnlijkheid dat supersymmetrische deeltjes gevormd zullen worden in de LHC. De botsingsdoorsnede is niet exact te berekenen, daarom wordt er gebruik gemaakt van benaderingsmethodes zoals storingsrekening. In deze scriptie wordt een onderdeel van de storingscorrectie berekend.

1.2 Indeling

Deze scriptie is als volgt georganiseerd. In het volgende hoofdstuk volgt een korte introductie over supersymmetrie en gluino's. In hoofdstuk 3 wordt het begrip botsingsdoorsnede besproken. Aan de hand van klassieke fysica wordt duidelijk gemaakt wat de botsingsdoorsnede inhoudt. Vervolgens zal er stap voor stap, met behulp van diagrammen, uitgelegd worden hoe de botsingsdoorsnede in de hoge-energiefysica berekend wordt. In hoofdstuk 4 wordt de benaderingsmethode behandeld die gebruikt wordt om de botsingsdoorsnede van het gluinopproductieproces te benaderen. In dat hoofdstuk zal ook uitgelegd worden waarom het threshold gebied interessant is. Ten slotte zal in dit hoofdstuk uitgelegd worden waarom het nodig is om de kleurstructuren die in de botsingsdoorsnede voorkomen te ontbinden in irreducibele kleurstructuren. In hoofdstuk 5 zal de thresholdlimiet van de botsingsdoorsnede genomen worden. In hoofdstuk 6 wordt een introductie gegeven over de speciale unitaire groep en hoe deze groep de kwantumchromodynamica beschrijft. Vervolgens zullen de reducibele representaties van kleurstructuren die in de botsingsdoorsnede voorkomen ontbonden worden in irreducibele representaties. In hoofdstuk 7 wordt uitgelegd hoe de uitgevoerde berekening is gecontroleerd

¹LHC is in het Engels de afkorting voor 'Large Hadron Collider', in het Nederlands 'grote hadronenbotser'.

op potentiële fouten. Ten slotte zijn er enkele handige technische details vastgelegd in verscheidene appendices.

2 Supersymmetrie

Supersymmetrie (SUSY) is op dit moment de meest gangbare uitbreiding van het standaardmodel. Er zijn verschillende supersymmetrische modellen. In deze scriptie wordt het minimale supersymmetrische standaardmodel (MSSM) gebruikt. Dit is de minimale uitbreiding van het standaardmodel waarin supersymmetrie gerealiseerd wordt. In het MSSM heeft ieder elementair deeltje een supersymmetrische partner. De partner van een fermion is altijd een boson en die van een boson een fermion. Verder zijn alle kwantumgetallen hetzelfde (vandaar ook partner). Daarnaast wordt meestal een behouden R-pariteit aangenomen. Supersymmetrische deeltjes hebben dan een R-pariteit van -1 en de standaardmodel deeltjes hebben een R-pariteit van 1 . Uit deze behouden grootheid volgt dat er een stabiel supersymmetrisch deeltje moet bestaan dat niet verder kan vervallen in lichtere supersymmetrische deeltjes. Het lichtste supersymmetrische deeltje heeft bijna geen interactie met de tot nog toe bekende materie. Dit betekent dat het lichtste supersymmetrische deeltje door experimentatoren herkend zal worden als verloren energie, omdat het geen interactie met de detector aangaat. Hoewel de theorie over supersymmetrie al goed uitgewerkt is, is supersymmetrie nog nooit gevonden. Er zijn hiervoor twee mogelijke verklaringen. De eerste verklaring is dat supersymmetrie niet bestaat en de tweede verklaring is dat supersymmetrische deeltjes erg zwaar zijn. Als supersymmetrische deeltjes erg zwaar zijn, hebben versnellers tot nu toe te weinig energie gehad om supersymmetrische deeltjes te creëren. Naast het verschil in spin moeten supersymmetrische deeltjes dus veel zwaarder zijn dan hun niet-supersymmetrische partners.

Deze scriptie gaat over de verstrooiing van twee gluonen (aangegeven met g) met als eindproduct twee gluino's (aangegeven met \tilde{g}). Het gluon is een boson, net als het foton. Het gluino is de supersymmetrische partner van het gluon en is dus een fermion. Net als gluonen hebben gluino's een kleur. De uitwisseling van kleur veroorzaakt de sterke kernkracht (er wordt om deze reden ook vaak gesproken over kleurlading). Er zijn drie kleuren, namelijk rood, groen en blauw. Naast deze kleuren bestaat er voor elke kleur nog een antikleur. Een gluino heeft net als een gluon altijd een kleur en een antikleur. Er bestaan geen kleurneutrale gluonen [1]. Daarom zijn er acht gluonen. Er wordt om deze reden vaak gesproken over het kleur-octet. Het kleuroctet is een representatie van $SU(3)$ waarover meer volgt in hoofdstuk 6.

In de LHC worden protonen op elkaar afgeschoten. Uit deze interactie worden voornamelijk deeltjes met kleur geproduceerd. Voor de zoektocht van supersymmetrische deeltjes is het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces daarom een belangrijk proces in de LHC. De massa van supersymmetrische deeltjes is onbekend. Het signaal dat een supersymmetrisch deeltje achterlaat in de LHC detector is afhankelijk van haar massa en de massa's van andere supersymmetrische deeltjes. In het geval van het gluino is vooral de massa van de squarks (aangegeven met \tilde{q}) belangrijk. Het squark is de supersymmetrische partner van het quark. Stel dat een gluino zwaarder is dan een squark, dan zal het gluino vervallen in een squark en een quark. Het squark zal op zijn beurt vervallen in een quark en het lichtste supersymmetrische deeltje. Het signaal dat in de LHC dan verkregen zou worden, zijn vier jets² plus verloren energie [2].

²In de LHC worden door middel van botsingen allerlei deeltjes geproduceerd, waaronder bijvoorbeeld quarks. Quarks kunnen niet geïsoleerd bestaan, omdat vrije deeltjes altijd kleurneutraal moeten zijn. Een quark zal daarom gaan hadroniseren, wat inhoudt dat er allemaal hadronen zullen ontstaan. Dit zal resulteren in een stroom van hadronen, die een interactie aan zullen gaan met de detector. Zo'n stroom van hadronen die door de detector heen gaat wordt een jet genoemd.

3 De botsingsdoorsnede

Zoals eerder vermeld gaat deze scriptie over de gluinopductie uit gluonen. Als gluino's licht genoeg zijn en bestaan dan zullen ze gevormd worden in de LHC. In de LHC worden er protonen op elkaar afgeschoten. Na de botsing ontstaan er nieuwe deeltjes. Het is echter onzeker welke deeltjes er zullen ontstaan. De kans dat er bepaalde deeltjes gevormd zullen worden, wordt de botsingsdoorsnede voor de productie van die deeltjes genoemd. Hoe deze botsingsdoorsnede berekend wordt, wordt in de komende paragraaf uitgewerkt. In deze inleiding wordt aan de hand van klassieke situaties duidelijk gemaakt wat de botsingsdoorsnede precies inhoudt. De meest eenvoudige situatie is een schutter die aan het schieten is op een schietschijf. In deze situatie is alleen de grootte van de schietschijf van belang, want des te groter de schijf, des te groter de kans om deze te raken.

In het geval van de productie van deeltjes gaat bovenstaande situatie niet op. De situatie die de productie van deeltjes beter beschrijft, is het afschieten van een bol tegen een andere bol. In deze situatie is er sprake van een hoekafhankelijkheid. Hoe dichterbij het midden de afgeschoten bol de stilstaande bol raakt, des te groter zal de afbuiging van de afgeschoten bol zijn. In deze situatie is het nooit helemaal zeker waar de afgeschoten bol zijn doel raken. Het is wel mogelijk om een schatting te maken in welk interval de bol tegen zijn doel aanbotst. Dit interval gaat logischerwijs gepaard met een interval voor de afbuigingshoek. De differentiële botsingsdoorsnede geeft de kans aan dat een deeltje in een bepaald interval terecht zal komen. Door de differentiële botsingsdoorsnede te integreren over de ruimtehoek, wordt dan de totale botsingsdoorsnede verkregen.

De bovenstaande situatie gaat voor elementaire deeltjes niet op. Elementaire deeltjes zijn namelijk geen harde bollen, maar oefenen een kracht op elkaar uit met een potentiaal. Daarnaast zijn ze altijd kwantummechanisch en relativistisch. Er zal daarom gebruik gemaakt moeten worden van kwantumveldentheorie (KVT). In de komende paragraaf wordt uitgewerkt hoe uit deze theorie de botsingsdoorsnede verkregen wordt. Deze paragraaf is gebaseerd op het kwantumvelden dictaat van Wim Beenakker [3]. In paragraaf 3.2 zullen de Mandelstamvariabelen geïntroduceerd worden. In paragraaf 3.3 zullen hogere-orde Feynmandiagrammen die in de botsingsdoorsnede voorkomen besproken worden. Ten slotte zal in de laatste paragraaf van dit hoofdstuk uitgelegd worden hoe uit de invariante matrix \mathcal{M} de botsingsdoorsnede verkregen wordt. Vervolgens zal de botsingsdoorsnede gespecificeerd worden voor het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces. In deze scriptie zal gewerkt worden met de conventie $\hbar = c = 1$.

3.1 De botsingsdoorsnede met kwantumveldentheorie

Voor het berekenen van de botsingsdoorsnede wordt in de kwantumveldentheorie, net als in de kwantummechanica, gekeken naar de verstrooiingsmatrix \hat{S} . Deze verstrooiingsmatrix volgt uit de tijdsevolutie-operator $\hat{U}(t_+, t_-)$, als t_+ en t_- respectievelijk naar oneindig en min oneindig gaan. Er kan dan gesproken worden van de situatie heel lang voor de interactie (inkomende deeltjes) en de situatie heel lang na de interactie (uitgaande deeltjes). De deeltjes zijn in deze situatie bij benadering als vrij te beschouwen. Voor een begintoestand $|i\rangle$ en een eindtoestand $|f\rangle$ geeft dit:

$$\lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \langle f | \hat{U}(t_+, t_-) | i \rangle \equiv \langle f | \hat{S} | i \rangle \equiv \langle f | (\hat{1} + i\hat{T}) | i \rangle \quad (1)$$

De verstrooiingsoperator \hat{S} wordt hier opgesplitst in de eenheidsoperator $\hat{1}$ en de transitie-operator \hat{T} . De eenheidsoperator correspondeert met de situatie waarin geen verstrooiing optreedt en de transitie-operator beschrijft de werkelijke verstrooiing.

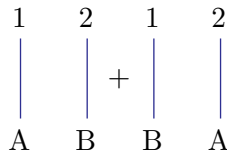
In formule (1) is $\langle f|T|i\rangle$ het transitie-matrixelement dat een bijdrage levert aan de botsingsdoorsnede. Er geldt vierimpulsbehoud: $\sum_i k_i - \sum_f p_f = 0$, waarbij k_i de inkomende en p_f de uitgaande vierimpulsen zijn. Het is mogelijk om vierimpulsbehoud in vergelijking (1) te isoleren door middel van een vierdimensionale δ -functie. Het transitie-matrixelement wordt dan:

$$\langle f|\hat{T}|i\rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i k_i - \sum_f p_f\right) \mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\})$$

Hierin is \mathcal{M} een invariante matrix. Het matrixelement $\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\})$ bevat alle relevante informatie over het proces.

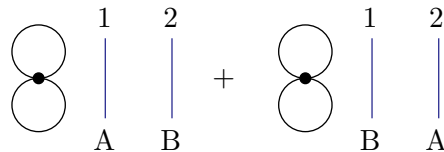
Het is niet mogelijk om \mathcal{M} exact te berekenen. Daarom zal er gebruik gemaakt worden van storingsrekening. De meest inzichtelijke manier om storingstheorie toe te passen in de hoge-energiefysica is met behulp van Feynmandiagrammen. Hierbij correspondeert elk Feynmandiagram met een bijdrage aan de verstrooiing. De interactiesterkte wordt gegeven door de koppelingsconstante, behorend bij de vertices (interactiepunten) in de Feynmandiagrammen. Deze koppelingsconstante is gewoonlijk klein. Voor de berekening van de botsingsdoorsnede zal er daarom in de koppelingsconstante geëxpandeerd worden. Als voorbeeld wordt de bijdrage van \mathcal{M} besproken voor een twee-deeltjes naar twee-deeltjes proces (korter: twee naar twee proces) met één soort scalair deeltje met alleen een vierdeeltjesinteractie. In dit proces is er altijd sprake van twee inkomende en twee uitgaande deeltjes. Deze zullen respectievelijk met A, B en $1, 2$ worden aangegeven. In deze scriptie zal als conventie de tijdschaal van de Feynmandiagrammen van beneden naar boven lopen.

Aangezien in deze scriptie de botsingsdoorsnede berekend wordt, zijn alleen diagrammen die een bijdrage leveren aan de transitie-operator, en daarmee aan de matrix \mathcal{M} , interessant. Op nulde-orde komen alleen diagrammen zonder vertices voor:



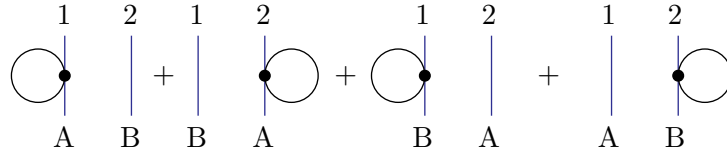
Deze diagrammen representeren een situatie waarin deeltjes op elkaar afkomen en onafgebogen weer uit elkaar gaan. Deze situatie levert dus geen bijdrage aan \hat{T} en daarmee ook niet aan \mathcal{M} .

Op eerste-orde komen er drie verschillende situaties voor. Bij elk van de situaties wordt nagegaan of ze een bijdrage leveren aan \mathcal{M} . De eerste situatie wordt door de volgende diagrammen gerepresenteerd:



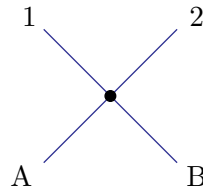
De dubbele lus representeert een vacuümfluctuatie en draagt niet bij tot verstrooiing van deeltjes. Dit proces levert dus geen bijdrage aan \hat{T} en daarmee ook niet aan \mathcal{M} .

De tweede situatie correspondeert met de volgende diagrammen:



De lussen geven een kwantumcorrectie op één van de deeltjes. Met het resterende deeltje wordt niks gedaan. Netto is er in deze situatie geen verstrooiing. Dit proces levert wederom geen bijdrage aan \hat{T} en daarmee ook niet aan \mathcal{M} .

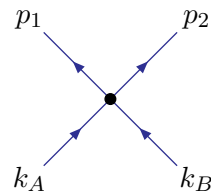
Het derde proces dat optreedt, is:



In deze situatie gaan de deeltjes een interactie met elkaar aan. Dit levert dus een bijdrage aan \hat{T} en daarmee ook aan \mathcal{M} . De grafische representaties kunnen met Feynmanregels in een algebraïsche vergelijking omschreven worden om zo de grootte van de bijdrage te bepalen. Het bovenstaande diagram is de leidende term van de storingsreeks, ofwel een eerste-orde storingsbenadering. In het Engels wordt de leidende term met *LO* aangeduid, wat voor ‘leading order’ staat.

3.2 Mandelstamvariabelen

De botsingsdoorsnede is Lorentzinvariant. Dit heeft tot gevolg dat er alleen massa’s en invariante combinaties van impulsen in $|\mathcal{M}|^2$ voor mogen komen. Deze invariante combinaties worden voor twee naar twee processen gegeven door Mandelstamvariabelen. Er zijn zes van deze invariante combinaties te vinden. Met behoud van impuls blijven er echter nog maar drie over. De Mandelstamvariabelen zijn gedefinieerd aan de hand van het volgende Feynmandiagram [1]:



De Mandelstamvariabelen worden dan gegeven door:

$$s = (k_A + k_B)^2 \quad (2)$$

$$t = (k_A - p_1)^2 \quad (3)$$

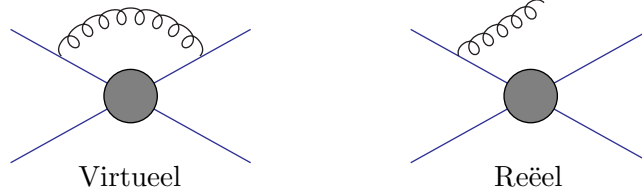
$$u = (k_A - p_2)^2 \quad (4)$$

Aangezien vrije deeltjes op de massaschil liggen geldt:

$$k_A^2 = m_A^2 \quad , \quad k_B^2 = m_B^2 \quad , \quad p_1^2 = m_1^2 \quad , \quad p_2^2 = m_2^2$$

3.3 Hogere-orde Feynmandiagrammen

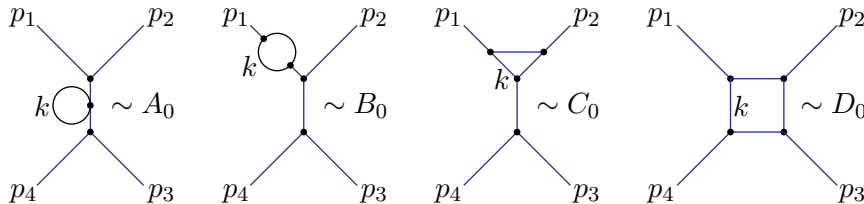
De benadering van de botsingsdoorsnede kan worden opgesplitst in een virtueel en een reëel deel. Het verschil tussen virtueel en reëel is het beste uit te leggen aan de hand van Feynmandiagrammen. Deze zien er als volgt uit:



Het verschil tussen de bovenstaande diagrammen is dat in het geval van de reële correctie de interactie zichtbaar is in de eindtoestand en in het geval van de virtuele correctie niet. De bovenstaande diagrammen zijn tweede-orde correcties in de stringtheorie. In het Engels wordt dit aangeduid met *NLO*, wat voor ‘next-to-leading order’ staat. De bovenstaande correcties zullen afzonderlijk divergeren. Een manier om dat op te lossen, is om naar n in plaats van naar vier ruimtetijd dimensies te kijken. Voor deze n wordt in deze scriptie de definitie $n \equiv 4 + \epsilon$ gebruikt, waarbij ϵ een fractionele dimensie is. In zowel het reële als het virtuele deel van de botsingsdoorsnede komen polen in epsilon voor van de vorm $\frac{1}{\epsilon}$ en $\frac{1}{\epsilon^2}$. In de som van het reële en het virtuele deel vallen deze polen weg. Daarom kan aan het eind van de berekening ϵ gelijk gesteld worden aan nul. Het wegvallen van deze ϵ -polen is tevens een consistentiecheck voor de berekening.

3.3.1 Virtuele correcties

In deze scriptie wordt het virtuele deel berekend. De virtuele correcties leveren diagrammen van de vorm:



Aangezien dit virtuele diagrammen zijn is het onbekend wat voor impulsen er bij de lussen van de diagrammen horen. Uit het superpositieprincipe volgt dan dat alle mogelijke impulsen meegenomen moeten worden. Daaruit volgt dat A_0 , B_0 , C_0 en D_0 corresponderen met integralen. In de botsingsdoorsnede komt ook nog de afgeleide van B_0 voor. Om deze integralen te introduceren, worden de volgende definities gebruikt:

$$\begin{aligned} D_1 &\equiv k^2 - m_1^2 \\ D_2 &\equiv (k + p_1)^2 - m_2^2 \\ D_3 &\equiv (k + p_1 + p_2)^2 - m_3^2 \\ D_4 &\equiv (k + p_1 + p_2 + p_3)^2 - m_4^2 \end{aligned}$$

Deze structuren komen als noemers in de integralen voor. Iedere noemer correspondeert met een lijn in de lus. In de noemer is m_j dan de massa die bij een lijn van de lus hoort en is p_i de impuls die de lus instroomt. De integralen hebben dan de volgende vorm [4]:

$$\begin{aligned}
A_0(m_1) &\propto \int \frac{d^n k}{D_1} \\
B_0(p_1, m_1, m_2) &\propto \int \frac{d^n k}{D_1 D_2} \\
B'_0(p_1, m_1, m_2) &= \frac{dB_0(p_1, m_1, m_2)}{dp_1^2} \\
C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) &\propto \int \frac{d^n k}{D_1 D_2 D_3} \\
D_0(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, m_4) &\propto \int \frac{d^n k}{D_1 D_2 D_3 D_4}
\end{aligned}$$

In de bovenstaande integralen wordt k uitgeïntegreerd. Aangezien de bovenstaande integralen scalaire zijn, moet de uitdrukking Lorentzinvariant zijn. Dit heeft tot gevolg dat de integralen alleen van Mandelstamvariabelen en massa's kunnen afhangen. De bovengenoemde integralen dragen bij aan het matrixelement \mathcal{M} en daarmee ook aan de botsingsdoorsnede.

3.4 Berekening van de botsingsdoorsnede

Net als in de kwantummechanica is de differentiële botsingsdoorsnede in de kwantumveldentheorie proportioneel met $|\mathcal{M}|^2$. Dit komt omdat de waarschijnlijkheidsamplitude gekwadraterd moet worden wanneer de botsingsdoorsnede berekend wordt. Bij de botsing worden er meerdere deeltjes gevormd die allerlei impulsen kunnen hebben. Er zal daarom geïntegreerd moeten worden over een faseruimte met daarin alle impulsen van de geproduceerde deeltjes. De formule voor de differentiële botsingsdoorsnede ziet er als volgt uit:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_j\})|^2 d\Pi_n}{4|E_B \vec{k}_A - E_A \vec{k}_B|} \quad (5)$$

De factor $\frac{1}{4}|E_B \vec{k}_A - E_A \vec{k}_B|^{-1}$ is een fluxfactor. Het faseruimte-element $d\Pi_n$ wordt gegeven door:

$$d\Pi_n \equiv \left(\prod_{j=1}^n \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}_j}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum_{j=1}^n p_j) \quad (6)$$

In de bovenstaande vergelijking hoeft er niet meer over vierimpulsen geïntegreerd te worden. Dit komt omdat alle vierimpulsen op de massaschil zitten, ofwel $p^2 = m^2$. In de komende subparagraaf wordt de bovenstaande vergelijking verder uitgewerkt voor het gluinproductieproces.

3.4.1 Botsingsdoorsnede van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces

De faseruimte uit vergelijking (6) vereenvoudigt met behulp van bolcoördinaten in het massamiddelpuntssysteem (CM, dit staat in het Engels voor 'center of mass') voor een twee naar twee proces tot:

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int \frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - p_1 - p_2) \\
&\quad \underline{CM} \int \frac{dp}{16\pi^2} \frac{p^2}{E_1 E_2} \int d\Omega \delta(E_{CM} - E_1 - E_2)
\end{aligned} \tag{7}$$

In deze uitdrukking is $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ en is $d\Omega$ de ruimtehoek. Vergelijking (7) is verder te vereenvoudigen door dp om te schrijven naar $d(E_1 + E_2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d(E_1 + E_2)}{dp} &= \frac{d(\sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2})}{dp} = \frac{p}{E_1} + \frac{p}{E_2} \\
\Rightarrow dp &= \frac{d(E_1 + E_2)}{p/E_1 + p/E_2}
\end{aligned}$$

Het invullen van deze substitutie in vergelijking (7) levert:

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int \frac{d(E_1 + E_2)}{16\pi^2 E_1 E_2} \frac{p^2}{p/E_1 + p/E_2} \int d\Omega \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \\
&= \frac{p}{16\pi^2 E_{CM}} \int d\Omega = \frac{p}{16\pi^2 E_{CM}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta
\end{aligned}$$

In de bovenstaande uitdrukking is ϕ de azimutale hoek en θ de hoek tussen een specifiek ingaand en uitgaand deeltje, zoals gedefinieerd in bijlage A. De bovenstaande uitdrukking is verder te vereenvoudigen met:

$$\begin{aligned}
k &= |\vec{k}_A| = |\vec{k}_B| = \sqrt{E_{A,B}^2 - m_{A,B}^2} \\
p &= |\vec{p}| = \sqrt{E_{1,2}^2 - m_{1,2}^2} \\
E_A + E_B &= E_1 + E_2 = E_{CM} = \sqrt{s}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
E_{A,B} &= \frac{s + m_{A,B}^2 - m_{B,A}^2}{2\sqrt{s}} \quad , \quad E_{1,2} = \frac{s + m_{1,2}^2 - m_{2,1}^2}{2\sqrt{s}}, \\
k &= \frac{\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}}{2\sqrt{s}} \quad \text{en} \quad p = \frac{\sqrt{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2\sqrt{s}}.
\end{aligned}$$

Voor het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces geldt dat $m_A = m_B = 0$ en $m_1 = m_2 = m_{\tilde{g}}$. Met gebruik van de thresholdparameter

$$\beta_{\tilde{g}} = \sqrt{1 - \frac{4m_{\tilde{g}}^2}{s}} \tag{8}$$

vereenvoudigen k en p naar:

$$p = \sqrt{\frac{(s - 2m_g^2)^2 - 4m_g^4}{4s}} = \frac{1}{2}\sqrt{s}\beta_{\tilde{g}}$$

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{s}$$

In het massamiddelpuntssysteem geldt $\vec{k}_A = -\vec{k}_B$. De flux-factor $\frac{1}{4}|E_B\vec{k}_A - E_A\vec{k}_B|^{-1}$ vereenvoudigt dan naar $\frac{1}{4}(kE_{CM})^{-1}$. Wanneer dit ingevuld wordt in formule (5) dan volgt daaruit de volgende formule:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\beta_{\tilde{g}}}{64\pi^2 E_{CM}^2} |\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_1, p_2)|^2. \quad (9)$$

4 Hogere-orde kwantumcorrectie

Zoals in de vorige hoofdstukken is verteld, wordt de botsingsdoorsnede benaderd met storingsrekening. Hierbij wordt altijd eerst de leidende term (LO) berekend. De tweede stap is om de tweede-orde term in de storingsreeks te berekenen, dat wil zeggen de eerste-orde storingscorrectie (NLO) op de LO -term. In het geval van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces is de NLO -correctie even groot als de leidende term, waardoor het eindresultaat twee keer zo groot is [5]. Bij zulke forse verschillen is het niet onwaarschijnlijk dat hogere-orde correcties ook een forse bijdrage zullen leveren. Het is in principe mogelijk om hogere-orde termen ($NNLO$, $NNNLO$...) mee te nemen. Echter, het is de verwachting dat deze termen langzaam zullen convergeren. Daarom is het wenselijk om een andere methode te zoeken.

Het langzaam convergerende gedrag van de storingsreeksen komt omdat supersymmetrische deeltjes erg zwaar zijn. Als deze deeltjes gevormd worden in een versneller zullen ze daarom weinig kinetische energie bevatten, omdat vrijwel alle energie in hun massa zal gaan zitten. Dit impliceert dat deze deeltjes met lage snelheden bewegen. Het gebied van lage snelheden wordt in de hoge-energiefysica met “threshold” aangeduid. Gluonen en gluino’s stralen laag-energetische gluonen af. De afstraling van deze laag-energetische gluonen leveren machten van $L = \log(8\beta_{\tilde{g}}^2)$ in de storingsreeksen op. De thresholdparameter $\beta_{\tilde{g}}$ is te interpreteren als de snelheid van de geproduceerde gluino’s. Daarom gaat deze thresholdparameter op threshold, dat wil zeggen op de kinematische drempel, naar nul en blazen de logaritmische termen dus op. Dit is ook te zien aan de definitie van $\beta_{\tilde{g}}$ uit vergelijking (8). Hierin zit de Mandelstamvariabele s verwerkt, die gedefinieerd is in vergelijking (2). In het massamiddelpuntssysteem is te zien dat s gelijk is aan $4E_{CM}^2$. Op threshold is dit gelijk aan de rustenergie, ofwel aan $4m_g^2$. Wanneer dit in vergelijking (8) ingevuld wordt, gaat $\beta_{\tilde{g}}$ naar nul. Om een oplossing voor dit probleem te vinden zal er gekeken worden hoe de storingsreeks van deze logaritmische termen afhangt. De leidende termen, uitgedrukt in de koppelingsconstante $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ van de sterke interacties en de logaritme L , hebben schematisch de volgende vorm:

$$\begin{aligned} LO : & \quad 1 \\ NLO : & \quad \alpha_s L^2 \quad \alpha_s L \quad \alpha_s \\ NNLO : & \quad \alpha_s^2 L^4 \quad \alpha_s^2 L^3 \quad \alpha_s^2 L^2 \quad \alpha_s^2 L \quad \alpha_s^2 \end{aligned}$$

Hierbij is de α_s^2 -afhankelijkheid van de LO -botsingsdoorsnede overal uitgedeeld. Normaal gesproken worden deze storingsreeksen afzonderlijk uitgerekend (ofwel horizontaal). Een andere aanpak is om uit elke reeks termen mee te nemen en die bij elkaar op te tellen. De oneindige sommen die daaruit verkregen worden, blijken te exponentiëren. Deze sommen zijn de nieuwe storingstermen en worden de LL , NLL en $NNLL$ -correcties³ genoemd. De nieuwe aanpak geeft storingscorrecties van de vorm [6]:

$$\sigma_{LL} = e^{F_{LL}} \sigma_{LO}(\beta \rightarrow 0) \quad (10)$$

$$\sigma_{NLL} = e^{F_{NLL}} \sigma_{LO}(\beta \rightarrow 0) \quad (11)$$

$$\sigma_{NNLL} = e^{F_{NNLL}} \sigma_{NLO}(\beta \rightarrow 0) \quad (12)$$

In deze uitdrukkingen zijn de functies F_{LL} , F_{NLL} en F_{NNLL} polynomen van α_s en L . Van de bovenstaande vergelijkingen zijn σ_{LL} en σ_{NLL} al bekend [7]. De volgende stap is om σ_{NNLL} te berekenen. Van σ_{NNLL} is F_{NNLL} al bekend [8]. In deze scriptie zal σ_{NLO} op threshold berekend worden.

Er zal ook nog gekeken worden naar kleurstructuren. Gluonen en gluino's wisselen namelijk kleurlading uit via de laag-energetische gluonen. Daarom zijn zowel F_{NNLL} als σ_{NLO} matrices in kleurruimte. In de bovenstaande vergelijkingen wordt dan een e-macht van een matrix genomen. Dit heeft tot gevolg dat σ_{NLL} en σ_{NNLL} de volgende vorm hebben:

$$\sigma_{(N)NLL} \sim \mathcal{M} e^{F_{(N)NLL}} \mathcal{M}^*$$

Het zal dus nodig zijn F_{NNLL} te diagonaliseren om op de vergelijkingen (10), (11) en (12) uit te komen. In dat geval commuteert \mathcal{M} namelijk met F_{NNLL} , zodat er een uitdrukking overblijft met $|\mathcal{M}|^2$ en de e-macht van F_{NNLL} . Als er operaties op F_{NNLL} worden uitgevoerd om deze te diagonaliseren, moeten dezelfde operaties uiteraard ook op σ_{NLO} uitgevoerd worden. Hoe F_{NNLL} te diagonaliseren is, komt ter sprake in hoofdstuk 6.

5 Het nemen van de thresholdlimiet

In dit hoofdstuk wordt de thresholdlimiet van de botsingsdoorsnede genomen. Zoals aan vergelijking (9) is te zien, hoeft alleen $|\mathcal{M}|^2$ nog berekend te worden. Om van dit matrixelement de thresholdlimiet te nemen is de volgende strategie gebruikt. Allereerst zal de opbouw van het matrixelement \mathcal{M} bekeken worden. De termen waaruit \mathcal{M} opgebouwd is, zullen vervolgens apart worden behandeld. Op het eind van dit hoofdstuk zal het numerieke resultaat van deze berekening besproken worden.

Het matrixelement \mathcal{M} komt, zoals in vergelijking (9) te zien is, kwadratisch voor. In deze scriptie zal daarom ook $|\mathcal{M}|^2$ berekend worden. Het matrixelement $|\mathcal{M}|^2$ is uitgedrukt in Mandelstamvariabelen en de A_0 , B_0 , B'_0 , C_0 en D_0 integralen. Het is de bedoeling om de botsingsdoorsnede tot op eerste orde in $\beta_{\bar{g}}$ te kennen. Uit vergelijking (9) volgt dan dat $|\mathcal{M}|^2$

³Dit staat in het Engels voor respectievelijk leading-logarithmic, next-to-leading-logarithmic en next-to-next-to-leading-logarithmic.

tot op nulde orde in $\beta_{\tilde{g}}$ berekend moet worden. Om dit te bereiken zullen de Mandelstamvariabelen en de integralen geëxpandeerd worden in $\beta_{\tilde{g}}$. In de rest van dit hoofdstuk wordt verteld welke stappen er genomen zijn om $|\mathcal{M}|^2$ tot op nulde orde in $\beta_{\tilde{g}}$ te krijgen.

Voor de berekening van $|\mathcal{M}|^2$ is gebruik gemaakt van het algebraïsche programma FORM [9].

5.1 Expanderen van de Mandelstamvariabelen

Zoals in de inleiding van dit hoofdstuk is vermeld, zullen de integralen en Mandelstamvariabelen geëxpandeerd worden in $\beta_{\tilde{g}}$. Aangezien het expanderen van de Mandelstamvariabelen relatief eenvoudig is, is het logisch om daarmee te beginnen. Voordat de Mandelstamvariabelen geëxpandeerd kunnen worden, zullen ze eerst in $\beta_{\tilde{g}}$ uitgedrukt moeten worden. Hiertoe worden de variabelen $t_{\tilde{g}} \equiv t - m_{\tilde{g}}^2$ en $u_{\tilde{g}} \equiv u - m_{\tilde{g}}^2$ gedefinieerd. Het omschrijven van deze variabelen in $\beta_{\tilde{g}}$ wordt behandeld in bijlage A. De uitdrukkingen die daaruit volgen zijn:

$$s = \frac{4m_{\tilde{g}}^2}{1 - \beta_{\tilde{g}}^2} \quad (13)$$

$$t_{\tilde{g}} = -\frac{s}{2} (1 - \beta_{\tilde{g}} \cos(\theta)) \quad (14)$$

$$u_{\tilde{g}} = -\frac{s}{2} (1 + \beta_{\tilde{g}} \cos(\theta)) \quad (15)$$

Hierin is θ de hoek tussen \vec{k}_A en \vec{p}_1 . In $|\mathcal{M}|^2$ komen de termen $[s - 4m_{\tilde{g}}^2]^{-1}$ en $[s - 4m_{\tilde{g}}^2]^{-2}$ voor. Door s uit vergelijking (13) in te vullen, is te zien dat deze termen proportioneel zijn met $1/\beta_{\tilde{g}}^2$ en $1/\beta_{\tilde{g}}^4$. Ook hebben sommige integralen een $1/\beta_{\tilde{g}}$ -afhankelijkheid. De hoogste negatieve macht van $\beta_{\tilde{g}}$ die dus voor kan komen, is $\beta_{\tilde{g}}^{-5}$. Aangezien het de bedoeling is om $|\mathcal{M}|^2$ tot op nulde orde in $\beta_{\tilde{g}}$ te kennen, zullen de Mandelstamvariabelen tot op vijfde orde in $\beta_{\tilde{g}}$ geëxpandeerd worden. Voor het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces vallen de divergenties ten gevolge van $[s - 4m_{\tilde{g}}^2]^{-1}$ en $[s - 4m_{\tilde{g}}^2]^{-2}$ na deze expansie weg. De divergenties ten gevolge van de integralen vallen niet weg en geven aanleiding tot de Coulombtermen die besproken worden in subparagraaf 5.2.2.

5.2 Expanderen van de scalaire integralen

Van alle scalaire integralen zijn de analytische uitkomsten bekend [4]. Hiervan moet nog wel de thresholdlimiet genomen worden. Om dit te bereiken zal er eerst naar de opbouw van de integralen gekeken worden. De uitkomsten van de integralen staan uitgedrukt in massa's, Mandelstamvariabelen, $\beta_{\tilde{g}}$ en $x_{\tilde{g}}$. Hierbij is $x_{\tilde{g}}$ een uitdrukking in $\beta_{\tilde{g}}$ die in vergelijking (32) staat gedefinieerd. In de vorige paragraaf is opgemerkt dat de enige $\beta_{\tilde{g}}$ -polen die overblijven het gevolg zijn van de integralen. Aangezien het de bedoeling is om $|\mathcal{M}|^2$ op nulde orde in $\beta_{\tilde{g}}$ te kennen, hoeven de integralen slechts tot op nulde orde geëxpandeerd te worden. In de komende subparagrafen worden enkele aspecten van de expansie van de integralen besproken. In de eerste subparagraaf zullen de imaginaire delen behandeld worden. Vervolgens zullen in de tweede subparagraaf de divergerende integralen besproken worden. In de derde subparagraaf zal aangetoond worden dat veel integralen hetzelfde zijn. In de laatste subparagraaf zal een vereenvoudiging van de integralen behandeld worden.

5.2.1 Imaginaire termen

Imaginaire termen zijn niet fysisch. Het kan echter wel voorkomen dat twee imaginaire termen met elkaar vermenigvuldigd worden, waaruit weer een reële term volgt. De imaginaire delen

liggen vast door de analytische structuur van het Feynmandiagram. In de uitkomsten van de integralen wordt dit weergegeven door variabelen van de vorm:

$$\bar{q} \equiv q + i\delta \quad (q, \delta \in \mathfrak{R}) \quad (16)$$

Deze definitie legt uniek vast of het argument van de (di)logaritme onder of boven de snede in het complexe vlak ligt. De variabele δ gaat naar nul aan het eind van de berekening. Aan de hand van een voorbeeld zal uitgelegd worden hoe de imaginaire bijdrage berekend wordt. Dit gaat als volgt:

$$\log\left(-\frac{\bar{s}}{m_{\bar{g}}^2}\right) = \log\left(\frac{-s - i\delta}{m_{\bar{g}}^2}\right) = \log(-4 - i\delta) = \log(4) - i\pi$$

Zonder definitie (16) was het teken van de imaginaire term niet te bepalen geweest. Voor dit teken is het namelijk van belang of de uitdrukking $\bar{s}/m_{\bar{g}}^2$ infinitesimaal boven of onder de reële as ligt.

5.2.2 Divergerende integralen

Er zijn twee manieren waarop een integraal kan divergeren bij threshold, namelijk door een ϵ -pool of doordat er een $1/\beta_{\bar{g}}$ in voorkomt. De ϵ -polen vormen geen problemen, omdat het bekend is dat deze op het eind wegvallen. Het $1/\beta_{\bar{g}}$ -afhankelijke deel van de integralen valt echter niet weg. Daarom wordt er in deze scriptie over divergerende integralen gesproken als ze een $1/\beta_{\bar{g}}$ -afhankelijkheid hebben. Deze integralen hebben de volgende vorm [4]:

$$I = \frac{1}{\beta_{\bar{g}}} f(s, t, u, x_{\bar{g}}, \beta_{\bar{g}}) \quad (17)$$

Hierin is I een divergerende integraal en is $f(s, t, u, x_{\bar{g}}, \beta_{\bar{g}})$ een functie waarin geen negatieve machten van $\beta_{\bar{g}}$ voorkomen. Er zijn alleen divergerende C_0 en D_0 integralen. De andere integralen bevatten nooit een divergerende $\beta_{\bar{g}}$ term. Om de uitdrukking voor de integralen tot op nulde orde in $\beta_{\bar{g}}$ te krijgen, zal $f(s, t, u, x_{\bar{g}}, \beta_{\bar{g}})$ tot op eerste orde in $\beta_{\bar{g}}$ geëxpandeerd worden. Een aantal expansies zijn behandeld in bijlage B. Na de expansie wordt er een divergerende en een convergerende term verkregen. Zoals aan vergelijking (9) is te zien wordt de uitdrukking van $|\mathcal{M}|^2$ vermenigvuldigd met $\beta_{\bar{g}}$ om de botsingsdoorsnede te verkrijgen. Het gevolg is dat een deel van de botsingsdoorsnede constant is. Dit deel is de zogenaamde Coulombcorrectie. Deze term wordt de Coulombcorrectie genoemd omdat de divergerende integralen ontstaan door de uitwisseling van een laag-energetisch gluon tussen de traag bewegende gluino's. Dit zijn in feite gebondentoestandseffecten, welke vergelijkbaar zijn met overeenkomstige effecten ten gevolge van de Coulombpotentiaal, zoals bekend uit elektromagnetisme.

5.2.3 Omschrijven van integralen

Van de A_0 , B_0 , B'_0 , C_0 en D_0 integralen zijn er veel gelijk. Dit is in te zien met behulp van een integraaltransformatie. In het voorbeeld zal dit voor een C_0 -integraal uitgewerkt worden, maar hetzelfde principe is ook toepasbaar op de andere integralen. Het omschrijven van een

integraal gaat als volgt:

$$\begin{aligned} C_0(p_1, p_2 - k_A, m_1, m_2, m_4) &= C_0(-k_B, p_1, m_4, m_1, m_2) \\ &= C_0(p_1, -k_B, m_2, m_1, m_4) \end{aligned}$$

Hierin zijn k_A en k_B de vierimpulsen van de inkomende gluonen en p_1 en p_2 de vierimpulsen van de uitgaande gluino's. Voor de eerste stap is gebruik gemaakt van de substitutie $k \rightarrow k - k_B$ en van vierimpulsbehoud $p_1 + p_2 = k_A + k_B$. Voor de tweede stap is de substitutie $k \rightarrow -k - p_1 + k_B$ toegepast.

Zoals in subparagraaf 3.3.1 al is opgemerkt kunnen de integralen alleen van Mandelstamvariabelen en massa's afhangen. Dit betekent dat als zowel p_1 en p_2 als k_A en k_B worden verwisseld dezelfde uitkomst wordt verkregen. Aangezien er bovendien op threshold gerekend wordt, is in de berekening de snelheid van de geproduceerde deeltjes gelijk aan nul. Dit impliceert dat de uitgaande vierimpulsen gelijk zijn aan de massa van de uitgaande deeltjes. In het gluinoproductieproces zijn beide uitgaande deeltjes gluino's en dus geldt op threshold $p_1 = p_2$. Met vierimpulsbehoud volgt dan $p_1 - k_A = k_B - p_1$. Met deze gegevens volgt:

$$C_0(p_1, -k_B, m_2, m_1, m_4) = C_0(p_1, -k_A, m_2, m_1, m_4)$$

Het is ook mogelijk om $(p_1 - k_B)^2$ op te vatten als t en $(p_1 - k_A)^2$ als u , zie vergelijkingen (4) en (3). In feite wordt dan de Mandelstamvariabele t in plaats van de Mandelstamvariabele u ingevuld. Zoals te zien is aan vergelijkingen (14) en (15) zijn deze variabelen op threshold aan elkaar gelijk, omdat $\beta_{\tilde{g}}$ dan nul is.

5.2.4 Vereenvoudigen van de integralen

Op threshold is een verdere vereenvoudiging mogelijk met breuksplitsen. Zoals eerder vermeld geldt voor het gluinoproductieproces op threshold dat $p_1 = p_2$. Bij breuksplitsen wordt van deze vereenvoudiging gebruik gemaakt. In het voorbeeld zal breuksplitsen op een D_0 -integraal toegepast worden. Deze vereenvoudiging gaat als volgt:

$$\begin{aligned} D_0(p_1, p_2, -k_A, m_1, m_2, m_3, m_4) &= \\ D_0(p_1, p_1, -k_A, m_1, m_2, m_3, m_4) &\propto \\ \int \frac{d^n k}{[k^2 - m_1^2][(k + p_1)^2 - m_2^2][(k + 2p_1)^2 - m_3^2][(k + 2p_1 - k_A)^2 - m_4^2]} &\equiv \\ \int \frac{d^n k}{D_1 D_2 D_3 D_4} \end{aligned}$$

Middels breuksplitsen levert dit:

$$\frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \frac{1}{D_4} \left(\frac{A}{D_1 D_2} + \frac{B}{D_1 D_3} + \frac{C}{D_2 D_3} \right) = \frac{AD_3 + BD_2 + CD_1}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

Omdat k een integratievariabele is, volgen hieruit de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
(A + B + C)k^2 &= 0 \\
(4A + 2B)k \cdot p_1 &= 0 \\
4Ap_1^2 - Am_3^2 + Bp_1^2 - Bm_2^2 - Cm_1^2 &= 1
\end{aligned}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt: $B = -2A = -2C$. Het is ook bekend dat $p_1^2 = m_{\tilde{g}}^2$, waaruit volgt:

$$\frac{1}{A} \equiv M = 2m_{\tilde{g}}^2 + 2m_2^2 - m_1^2 - m_3^2$$

Hieruit volgt met het voorgaande:

$$\begin{aligned}
D_0(p_1, p_2, -k_A, m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{C_0(p_1, p_2 - k_A, m_1, m_2, m_4)}{M} - \frac{2C_0(k_A + k_B, -k_A, m_1, m_3, m_4)}{M} \\
&\quad + \frac{C_0(p_1, -k_A, m_2, m_3, m_4)}{M}
\end{aligned}$$

In het voorbeeld is een D_0 -integraal omgeschreven naar C_0 -integralen, maar op eenzelfde manier zijn de C_0 -integralen om te schrijven naar B_0 -integralen. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat breuksplitsen alleen mogelijk is wanneer zowel p_1 als p_2 in het argument van de integraal voorkomen. Er is ook nog een andere restrictie. Vereenvoudigen is namelijk nooit mogelijk voor divergerende integralen (die dus afhankelijk zijn van $1/\beta_{\tilde{g}}$). Wanneer breuksplitsen op een divergerende integraal toegepast wordt, zal dit niet lukken. De noemer M wordt dan namelijk nul, omdat alle massa's tegen elkaar wegvallen. Dit is ook meteen aan de uitkomsten van de integralen te zien. In het geval van de C_0 -integralen is dit duidelijk, omdat er zoals eerder vermeld geen divergerende B_0 -integralen bestaan. Bij de D_0 -integralen heeft dit te maken met het feit dat de divergerende D_0 -integralen ook een hoekafhankelijkheid hebben. Deze hoekafhankelijkheid komt in de divergerende C_0 -integralen nooit terug, waardoor omschrijven onmogelijk is.

5.3 Numerieke resultaten

Nu de uitdrukking bekend is zal het resultaat van de berekening besproken worden. De massa's van supersymmetrische deeltjes zijn onbekend. In deze scriptie spelen er drie massa's een rol, namelijk de massa's van het gluino, squark en top-quark. De massa van het top-quark is al bekend en bedraagt ongeveer 175 GeV [10]. De massa's van het gluino $m_{\tilde{g}}$ en de squarks $m_{\tilde{q}}$ zijn onbekend. Om de resultaten te presenteren wordt $m_{\tilde{g}}$ op 1000 GeV gezet en wordt $m_{\tilde{q}}$ gevarieerd.

In de hoge-energiefysica is het gebruikelijk om de botsingsdoorsnede op te splitsen in schaal-functies. Voor het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces wordt de opsplitsing van de botsingsdoorsnede gegeven door [5]:

$$\sigma_{gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{m_{\tilde{g}}^2} \left\{ f_{gg}^B(\eta, r) + 4\pi\alpha_s(Q^2) \left[f_{gg}^{V+S}(\eta, r, r_t) + f_{gg}^H(\eta, r) + \bar{f}_{gg}(\eta, r) \log \left(\frac{Q^2}{m_{\tilde{g}}^2} \right) \right] \right\} \quad (18)$$

met

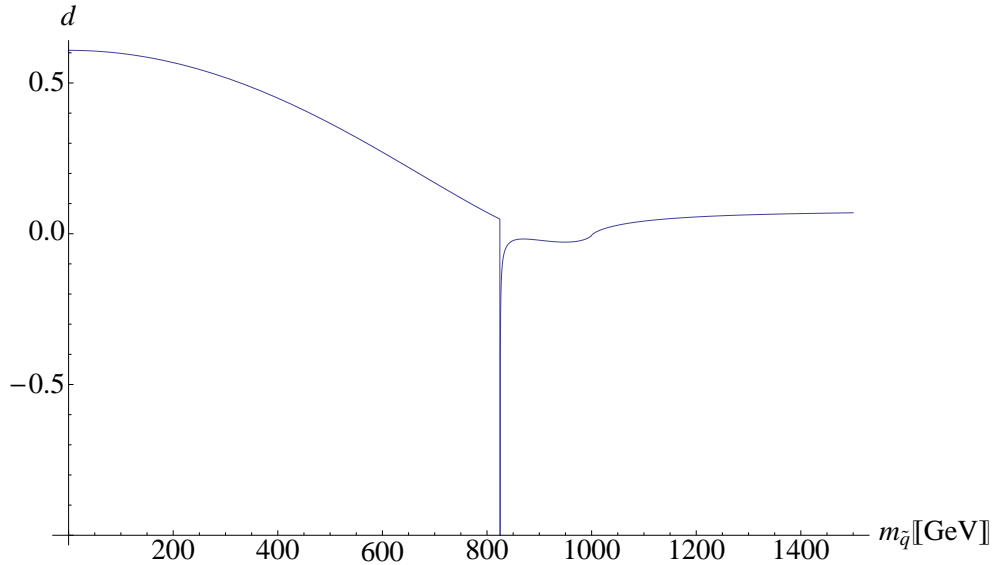
$$\eta = \frac{s}{4m_{\tilde{g}}^2} - 1 \quad r = \frac{m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{q}}^2} \quad r_t = \frac{m_t^2}{m_{\tilde{g}}^2}$$

De Q is hierin nodig voor de renormalisatieschaal. De f 's zijn de schaalfuncties. Deze schaalfuncties zijn opgesplitst in de Born-term (LO -term) f^B , de som van virtuele correcties en zachte gluoncorrecties f^{V+S} en de harde gluoncorrecties f^H . Aangezien in deze scriptie het virtuele deel van de botsingsdoorsnede is berekend, zal er een grafiek gemaakt worden van f^{V+S} .

De term f^{V+S} wordt op threshold gedomineerd door de constante Coulombterm. Het is daarom wenselijk om f^{V+S} zonder de Coulombterm te bekijken. Als vervolgens $\beta_{\tilde{g}}$ uitgedeeld wordt, blijft op threshold een constante term over. In de grafiek zal daarom de dimensieloze uitdrukking

$$d \equiv \frac{1}{\beta_{\tilde{g}}} (f^{V+S} - \text{Coulombterm}) \quad (19)$$

geplot worden. In figuur 1 wordt d uitgezet tegen $m_{\tilde{q}}$.



Figuur 1: In deze grafiek staat vergelijking (19) uitgezet tegen $m_{\tilde{q}}$ voor $m_{\tilde{g}} = 1000$ GeV

In figuur 1 is te zien dat d groter is voor kleine $m_{\tilde{q}}$. De piek in figuur 1 wordt veroorzaakt doordat de levensduur van het gluino als oneindig wordt verondersteld. In de werkelijkheid zal het gluino uiteindelijk vervallen. De piek is dus niet fysisch en zal afvlakken bij een eindig genomen levensduur van het gluino. Daarnaast verandert het gedrag van de grafiek voor gelijke massa's ($m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{q}}$). Dit hangt samen met snedes in het complexe vlak, zie hiervoor subparagraaf 5.2.1 over imaginaire termen.

6 Kleurstructuren

In hoofdstuk 4 is uitgelegd dat, door de kleurcorrelaties tussen gluonen en gluino's, F_{NNLL} en σ_{NLO} uit vergelijking (12) matrices moeten zijn in kleurruimte. De kleurcorrelaties van gluonen en gluino's worden beschreven met kwantumchromodynamica en de Lie-groep $SU(3)$. Omdat van F_{NNLL} een e-macht genomen wordt, is het wenselijk F_{NNLL} te diagonaliseren. Het is mogelijk F_{NNLL} te diagonaliseren door de kleurstructuren die in F_{NNLL} voorkomen te ontbinden in irreducibele representaties. Als F_{NNLL} gediagonaliseerd wordt zal σ_{NLO} ook gediagonaliseerd moeten worden. Daarom zullen ook de kleurstructuren die in σ_{NLO} voorkomen ontbonden worden in irreducibele representaties.

In de eerste paragraaf zal de speciale unitaire groep $SU(N)$ behandeld worden. Vervolgens zal in paragraaf 2 het begrip representatie besproken worden. Hier zal ook uitgelegd worden hoe reducibele representaties te ontbinden zijn in irreducibele representaties. In de derde paragraaf worden de reducibele representaties gegeven die in de botsingsdoorsnede voorkomen. Vervolgens zullen deze in paragraaf vier worden ontbonden. Ten slotte zal in de laatste paragraaf het resultaat besproken worden.

6.1 Speciale unitaire groep

De groep $SU(3)$ is een voorbeeld van de speciale unitaire groep $SU(N)$. Dit is de groep van unitaire matrices⁴ met determinant 1 en met matrixvermenigvuldiging als groepsoperatie. De groep $SU(N)$ is een Lie-groep. Lie-groepen beschrijven continue symmetrieën van wiskundige objecten en structuren. Bij een Lie-groep hoort een Lie-algebra. Een Lie-algebra kan geïnterpreteerd worden als de afgeleide van een Lie-groep in een bepaald punt. In de natuurkunde wordt meestal met deze algebra gewerkt. Voortaan zal er met de groep $SU(N)$ dan ook de bijbehorende Lie-algebra bedoeld worden.

Gluonen zitten in de geadjungeerde representatie van $SU(3)$. Zoals in hoofdstuk 2 vermeld zijn er acht verschillende gluonen, net zoveel als generatoren van $SU(3)$.

Zoals de $SU(2)$ -algebra gerepresenteerd kan worden door de Pauli-matrices, kan de $SU(3)$ -algebra gerepresenteerd worden door de Gell-Mann-matrices:

$$\begin{aligned}
 T^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 T^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & T^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 T^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & T^8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Deze acht matrices zijn representanten voor het kleuroctet van gluonen en gluino's. Zoals te zien is, zijn alle matrices hermitisch en spoorloos. De Gell-Mann-matrices voldoen aan de volgende eigenschappen:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad a, b, c = 1, \dots, 8 \quad (20)$$

⁴Een unitaire matrix voldoet aan de eis $U^\dagger U = I$ met U^\dagger de hermitische geconjugeerde van U

Hierbij wordt met een herhaalde index impliciet bedoeld dat over die index wordt gesommeerd. De bovenstaande relatie geldt niet alleen voor de Gell-Mann-matrices, maar voor alle representaties van $SU(3)$, op een constante factor na. In de bovenstaande vergelijking zijn f^{abc} de structuurconstanten. De structuurconstanten zijn compleet antisymmetrisch, dat wil zeggen dat f^{abc} van teken omslaat onder verwisseling van elk willekeurig tweetal indices. Uit het bovenstaande volgt dat er $8^3 = 512$ structuurconstanten zijn. In de realiteit zijn het er minder, omdat de meeste gelijk aan nul zijn. Zodoende blijft de volgende set van structuurconstanten over:

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De overige structuurconstanten liggen vast omdat f^{abc} volledig antisymmetrisch is. Deze structuurconstanten karakteriseren de groep. Naast de antisymmetrische structuurconstanten bestaat er ook nog het symmetrische equivalent d^{abc} . Deze zijn gedefinieerd door:

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{3}\delta^{ab} + d^{abc}T^c \quad (21)$$

Uit de bovenstaande commutatierelatie volgt:

$$d^{118} = d^{228} = d^{338} = -d^{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$d^{146} = d^{157} = -d^{247} = d^{256} = d^{344} = d^{355} = -d^{366} = -d^{377} = \frac{1}{2}$$

De overige constanten liggen vast omdat d^{abc} volledig symmetrisch is.

Het blijkt vaak ook handig om structuurconstanten te representeren door een matrix. Deze matrices zijn als volgt gedefinieerd [1]:

$$F_{bc}^a = -if^{abc}$$

$$D_{bc}^a = d^{abc}$$

De matrices F en D voldoen aan de volgende identiteiten:

$$[F^a, F^b] = if^{abc}F^c \quad (22)$$

$$[F^a, D^b] = if^{abc}D^c \quad (23)$$

Andere identiteiten die gebruikt zijn, staan in bijlage C.

6.2 Reducibele en irreducibele representaties

Groepsoperaties kunnen altijd gerepresenteerd worden door matrices. Hierbij zijn twee verschillende type representaties te onderscheiden: reducibele en irreducibele. Reducibele representaties zijn altijd te ontbinden in irreducibele representaties. Het principe hiervan is hetzelfde als het projecteren van vectoren op een basis in de lineaire algebra. Voor groepen is het mogelijk om een dergelijke basis te maken van irreducibele representaties. De reducibele representaties kunnen dan ontbonden worden door deze op de basis van irreducibele representaties te projecteren. In feite werken de irreducibele representaties als projectie-operatoren.

Om een gevoel te geven voor het ontbinden van reducibele representaties in irreducibele representaties zal er een bekend voorbeeld uitgewerkt worden, namelijk de situatie van twee spin- $\frac{1}{2}$ deeltjes in de kwantummechanica. De spin wordt meestal gerepresenteerd door de Pauli-matrices. De Pauli-matrices hebben twee eigenwaarden. Dit betekent dat spin- $\frac{1}{2}$ deeltjes in een tweedimensionale representatie zitten. De dimensie van de combinatie van twee spin- $\frac{1}{2}$ deeltjes is dan $2 \times 2 = 4$. Zoals bekend uit de kwantummechanica kan deze representatie opgesplitst worden in een spin-0 (singlet) en een spin-1 (triplet) toestand. De ééndimensionale spin-0 toestand gecombineerd met de driedimensionale spin-1 toestand vormt de basis voor de combinatie van twee spin- $\frac{1}{2}$ deeltjes.

Voor het gluonproductieproces kan net zoets gedaan worden. In dit geval zijn er geen twee tweedimensionale representaties, maar twee achtdimensionale representaties. Dit levert dus een dimensie van $8 \times 8 = 64$ op voor de reducibele representatie van de botsingsdoorsnede. De kleurbasis van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces wordt gegeven door [11]:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} \\
 a_2 &= \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \\
 a_3 &= \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \\
 a_4 &= \frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \\
 a_5 &= \frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} - \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2}
 \end{aligned}$$

Hierin zijn a en b de achtwaardige kleurlabels van de inkomende gluonen en c_1 en c_2 die van de uitgaande gluino's. De dimensies van de basisstructuren bedragen respectievelijk 1, 8, 8, 20, 27. Bij elkaar opgeteld levert dit zoals verwacht 64 op. De dimensies van de kleurstructuren zijn van belang in de berekening van de $(N)NLL$ -botsingsdoorsnede. Er wordt namelijk een e-macht van de matrix $F_{(N)NLL}$ genomen. De elementen in de gediagonaliseerde matrix $F_{(N)NLL}$ zijn groter voor basisstructuren met een hogere dimensie. Als de dimensie van een kleurstructuur groter is, zal er dus een e-macht van een groter getal genomen worden (zie referentie [11]). Dit betekent dat als a_5 minder vaak voorkomt dan a_1 het toch mogelijk is dat a_5 een grotere bijdrage levert, omdat haar dimensie groter is.

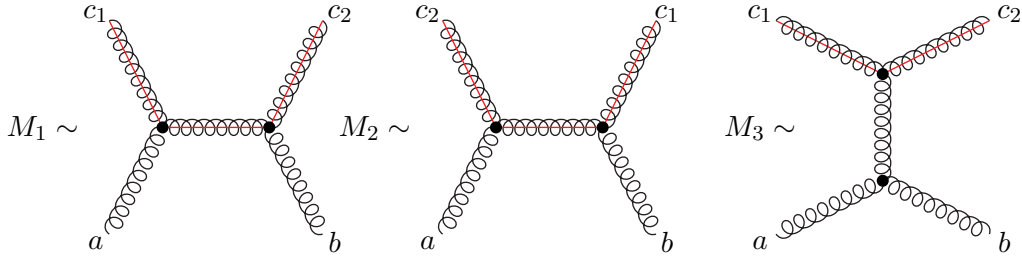
6.3 Kleurstructuren van het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces

In deze paragraaf zal uitgelegd worden welke kleurstructuren voorkomen in de NLO -botsingsdoorsnede. Welke kleurstructuren voorkomen is het makkelijkst te zien aan de hand van Feynmandiagrammen. Hiervoor hoeft er alleen naar de LO diagrammen gekeken te worden. Dit

volgt uit de berekening van $|\mathcal{M}|^2$ voor de NLO -botsingsdoorsnede. Daaruit volgt namelijk:

$$|\mathcal{M}|^2 = (\mathcal{M}_{LO} + \mathcal{M}_{NLO} + \dots)(\mathcal{M}_{LO} + \mathcal{M}_{NLO} + \dots)^* \\ \approx |\mathcal{M}_{LO}|^2 + 2\Re(\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}_{NLO}^*) + \dots$$

Voor de NLO -correctie zijn geen hogere-orde termen nodig. Van de bovenstaande uitdrukking is $|\mathcal{M}_{LO}|^2$ al berekend [7]. In deze scriptie hoeft dus slechts de ontbinding van de kleurstructuren van de term $2\Re(\mathcal{M}_{LO}\mathcal{M}_{NLO}^*)$ bepaald te worden. De kleurstructuren van de LO -diagrammen worden in deze scriptie geprojecteerd op de kleurbasis. Omdat de kleurbasis orthogonaal is, worden daarmee automatisch de kleurstructuren van de NLO -diagrammen correct geprojecteerd. Het gluonproductieproces wordt op LO gerepresenteerd door de volgende Feynmandiagrammen:



In deze diagrammen representeren de spiraallijnen gluonen en de spiraallijnen met een lijn gluino's. Het kleuredrag van de bijbehorende Feynmanregels is [1]:



Zoals te zien, is het kleuredrag van beide vertices hetzelfde. Als de bovenstaande Feynmanregels toegepast worden, volgen daaruit de volgende kleurstructuren:

$$M_1 \sim f^{acc_1} f^{bcc_2} \quad (24)$$

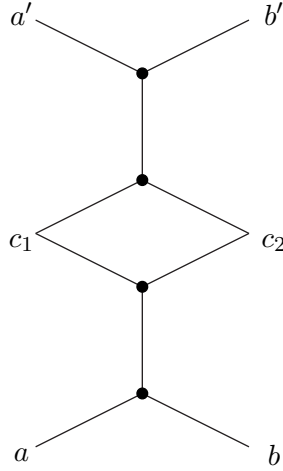
$$M_2 \sim f^{acc_2} f^{bcc_1} \quad (25)$$

$$M_3 \sim f^{abc} f^{cc_1c_2} \quad (26)$$

Hierin is c een dummie-index. Deze drie representaties zijn niet onafhankelijk van elkaar. Het is daarom mogelijk één van de structuren om te schrijven in de andere twee. Dit volgt direct uit vergelijking (22). In deze scriptie worden daarom alleen de structuren (24) en (25) ontbonden in irreducibele representaties.

6.4 Kleurontbinding van de botsingsdoorsnede

In deze paragraaf zullen de kleurstructuren ontbonden worden. De manier waarop dit gedaan wordt, is vergelijkbaar met de Gramm-Schmidtmethode uit de lineaire algebra om vectoren te orthogonaliseren. Er is wel een probleem, want in het geval van de Gramm-Schmidtprocedure wordt gebruik gemaakt van een inproduct. Bij kleurstructuren is er geen inproduct gedefinieerd. Het is wel mogelijk een interpretatie van een inproduct van kleurstructuren te geven. Deze interpretatie is het best uit te leggen aan de hand van het volgende Feynmandiagram:



In dit diagram worden twee kleurstructuren kop-aan-staart aan elkaar gekoppeld. Bij het inproduct zullen de losse lijnen behorend bij de deeltjes met kleurlabels a , b , a' en b' nog aan elkaar gekoppeld moeten worden. Analytisch houdt dit in dat $a = a'$ en $b = b'$. Het inproduct van de kleurstructuur a_2 met zichzelf levert bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
 a_2 \cdot a_2 &= \left(\frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \right) \left(\frac{3}{5} d^{c_1 c_2 d} d^{dab} \right) \\
 &= \frac{9}{25} d^{abc} d^{cc_1 c_2} d^{c_1 c_2 d} d^{dab} \\
 &= \frac{3}{5} d^{abc} d^{dab} \delta^{cd} \\
 &= \delta^{cc} = 8
 \end{aligned}$$

Zoals eerder vermeld, vormen a_1, \dots, a_5 een orthogonale kleurbasis en daarvoor geldt: $a_i \cdot a_j = 0$ als $i \neq j$. Een kleurontbonden structuur in $SU(3)$ wordt dan verkregen door de volgende formule:

$$g = \sum_{i=1}^5 \frac{a_i \cdot g}{a_i \cdot a_i} a_i \quad (27)$$

waarin g de te ontbinden kleurstructuur is. Toegepast op de structuren (24) en (25) levert dit:

$$F_{c_2c}^b F_{cc_1}^a = 3a_1 + \frac{12}{8}a_2 + \frac{12}{8}a_3 - a_5 \quad (28)$$

$$F_{c_2c}^a F_{cc_1}^b = 3a_1 + \frac{12}{8}a_2 - \frac{12}{8}a_3 - a_5 \quad (29)$$

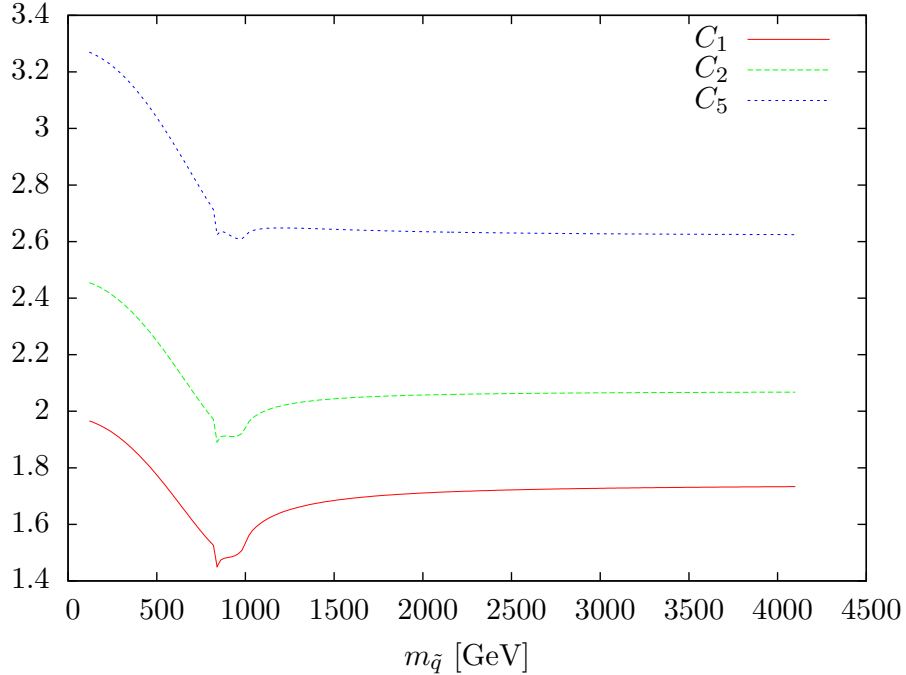
De berekening hiervan staat in bijlage C.

6.5 Numerieke resultaten

Wanneer de kleurstructuren ontbonden zijn, is de bijdrage per basisstructuur te berekenen. Van deze bijdrage zal zowel het virtuele als het reële deel meegenomen worden. Niet alle basisstructuren komen in de botsingsdoorsnede voor. Zo is aan de ontbonden structuren uit vergelijkingen (28) en (29) al direct te zien dat basisstructuur a_4 niet in de botsingsdoorsnede voorkomt. Bij de berekening van de botsingsdoorsnede op threshold valt ook de basisstructuur a_3 weg. De basisstructuren die in de botsingsdoorsnede op threshold dus voorkomen zijn a_1, a_2 en a_5 . Voor elke basisstructuur wordt de coëfficiënt

$$C_i = \frac{\sigma_{NLO,i} - \text{Coulomb}_i - L_i}{\sigma_{LO,i}} \quad (30)$$

gedefinieerd. De termen Coulomb_i , $\sigma_{NLO,i}$ en $\sigma_{LO,i}$ zijn hier respectievelijk de Coulombterm, de LO -botsingsdoorsnede en de NLO -botsingsdoorsnede op threshold behorend bij basisstructuur i . Het symbool L_i staat voor de machten van logaritmen $\log(8\beta_{\bar{g}}^2)$ in $\sigma_{NLO,i}$. In figuur 2 staan de coëfficiënten van vergelijking (30) gegeven voor een gluinomassa van 1000 GeV en een variabele squarkmassa.



Figuur 2: In deze grafiek zijn C_1 , C_2 en C_5 uitgezet tegen $m_{\bar{q}}$ voor $m_{\bar{g}} = 1000$ GeV.

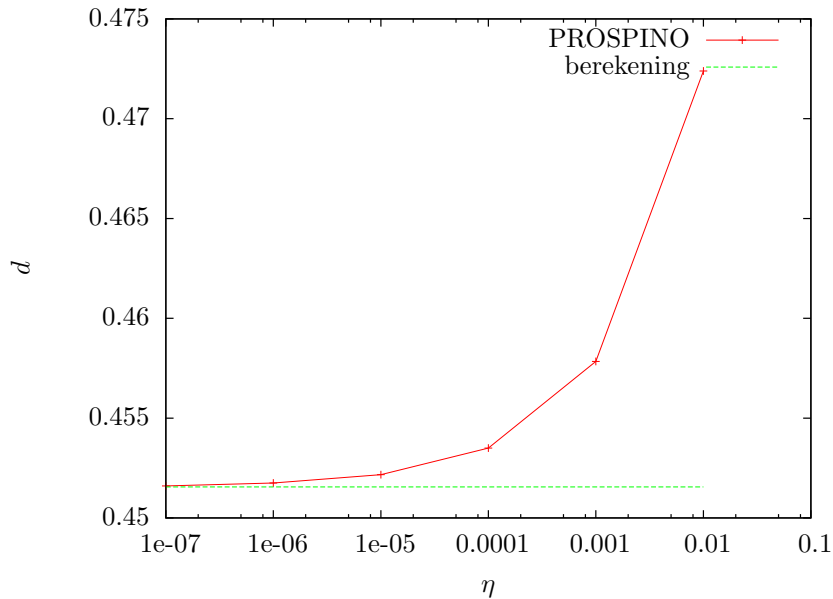
Figuur 2 heeft dezelfde vorm als figuur 1. De niet-fysische piek uit figuur 1 komt in figuur 2 niet voor omdat figuur 2 numeriek bepaald is. De niet-fysische piek komt maar op exact één punt voor en daarom is deze in figuur 2 niet zichtbaar. De interpretatie van figuur 2 is dan ook hetzelfde als van figuur 1. Echter, figuur 2 geeft meer informatie dan figuur 1. Zo is aan figuur 2 te zien dat kleurstructuren met een hogere dimensie een grotere bijdrage aan de correctie van de botsingsdoorsnede leveren. Zoals te zien geldt $C_5 > C_2 > C_1$. Aangezien dit nog versterkt wordt door een e -macht wordt dit een heel groot effect. Aan figuur 2 is ook te zien dat de NLO -correctie vrij fors is. Voor veel massa's is de correctie zelfs groter dan de LO -botsingsdoorsnede.

7 Controle van de berekening

Wanneer de berekening is uitgevoerd, moet deze natuurlijk nog gecontroleerd worden. De eerste controles zijn consistentiechecks. De eerste consistentiecheck volgt uit paragraaf 3.3. Hierin is de fractionele dimensie ϵ geïntroduceerd om met divergenties om te gaan. De divergenties worden dan gerepresenteerd door ϵ -polen. Op het eind van de berekening moeten deze polen wegvallen. In het geval van kleurontbinding moeten deze polen ook per C -coëfficiënt wegvallen. Dit is expliciet gecheckt.

De tweede consistentiecheck is het controleren van de Coulombterm. Deze term is namelijk al berekend en bedraagt $27\pi/1024$ [5]. Dit volgt ook uit de in deze scriptie uitgevoerde berekening.

Na de consistentiechecks kan de grootheid d uit vergelijking (19) gecontroleerd worden. Het exacte resultaat is met behulp van mathematica berekend. Daarnaast is d ook numeriek benaderd met behulp van PROSPINO [5]. Met PROSPINO wordt de thresholdlimiet benaderd door de dimensieloze parameter η zeer klein te maken. Als η klein is, dan is deze namelijk proportioneel met β_g^2 . Daarom kan η gebruikt worden om vergelijking (19) te controleren op threshold. Figuur 3 toont de uitkomst van PROSPINO als functie van η en de exacte berekening voor $m_{\bar{q}} = 500$ GeV, $m_{\bar{q}} = 200$ GeV en $m_t = 175$ GeV.



Figuur 3: In deze grafiek wordt het exacte en het numerieke resultaat van uitdrukking (19) met elkaar vergeleken. Een kleine waarde van η correspondeert met de thresholdlimiet. Zoals te zien is komt het exacte resultaat overeen met het numerieke resultaat.

Aan figuur 3 is te zien dat het exacte resultaat overeenkomt met het numerieke resultaat. Dit is ook voor andere massacombinaties gecheckt.

8 Conclusie

In deze scriptie is het virtuele deel van de NLO -botsingsdoorsnede voor het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces op threshold uitgerekend. Het uiteindelijke doel is om de $NNLL$ -botsingsdoorsnede te kennen. De NLO -botsingsdoorsnede op threshold is hier een onderdeel van. De NLO -correctie corrigeert de LO -botsingsdoorsnede met een factor twee afhankelijk van de massa's van het squark en het gluino.

Om de $NNLL$ -botsingsdoorsnede te verkrijgen moet de NLO -botsingsdoorsnede gecombineerd worden met een ϵ -macht van een matrix in kleurruimte. In deze scriptie zijn daarom de kleurstructuren die in de NLO -botsingsdoorsnede voorkomen ontbonden in irreducibele representaties. Uit de ontbonden kleurstructuren volgen coëfficiënten die de ratio tussen NLO en LO op threshold per basisstructuur geven. Uit de berekening van die coëfficiënten volgt dat basisstructuren met een hogere dimensie een grotere bijdrage leveren aan de botsingsdoorsnede. Deze bijdrage wordt vervolgens versterkt door de ϵ -macht.

Het gluinoproductieproces dat in deze scriptie is behandeld is slechts één onderdeel van de supersymmetrische $NNLL$ -botsingsdoorsnede. In het vervolgonderzoek is het mogelijk de andere processen uit te rekenen en daarmee de berekening compleet te maken. Bovendien moet de NLO -botsingsdoorsnede op threshold nog gecombineerd worden met een ϵ -macht.

Dankwoord

Met dank aan Irene Niessen en Wim Beenakker voor de prettige begeleiding van deze scriptie.

A Mandelstamvariabelen

In deze scriptie wordt er gekeken naar het $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ proces. In dit proces zijn de inkomende deeltjes massaloos. In het massamiddelpuntssysteem geldt bovendien dat $E_A = E_B$ en $\vec{k}_A = -\vec{k}_B$. Uit vergelijking (2) volgt dan in het massamiddelpuntssysteem dat:

$$s = (k_A + k_B)^2 = 4E_A^2 = E_{CM}^2$$

In het CM stelsel kunnen t en u uitgedrukt worden in s . Het is echter makkelijker om hiertoe andere grootheden te introduceren namelijk, $t_{\tilde{g}} \equiv t - m_{\tilde{g}}^2 = -2k_A \cdot p_1$ en $u_{\tilde{g}} \equiv u - m_{\tilde{g}}^2 = -2k_A \cdot p_2$. Deze laten zich omschrijven door middel van de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} E_A^2 &= \vec{k}_A^2 \\ E_1^2 &= \vec{p}_1^2 + m_{\tilde{g}}^2 \end{aligned}$$

Met behoud van energie geldt in het massamiddelpuntssysteem dat $E_A = E_1$. Met dit gegeven en de bovenstaande vergelijkingen volgt:

$$|\vec{p}_1| = \sqrt{\vec{k}_A^2 - m_{\tilde{g}}^2}$$

waaruit volgt dat:

$$\begin{aligned} t_{\tilde{g}} &= -2E_A E_1 + 2|\vec{k}_A| |\vec{p}_1| \cos(\theta) \\ &= -2E_A^2 + 2|\vec{k}_A| \sqrt{\vec{k}_A^2 - m_{\tilde{g}}^2} \cos(\theta) \\ &= -2\vec{k}_A^2 + 2|\vec{k}_A| \sqrt{\vec{k}_A^2 - m_{\tilde{g}}^2} \cos(\theta) \\ &= -2\vec{k}_A^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_{\tilde{g}}^2}{\vec{k}_A^2}} \cos(\theta) \right) \\ &= -\frac{s}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_{\tilde{g}}^2}{s/4}} \cos(\theta) \right) \\ &= -\frac{s}{2} (1 - \beta_{\tilde{g}} \cos(\theta)) \end{aligned}$$

De hoek θ is hierbij de hoek tussen \vec{k}_A en \vec{p}_1 . Voor $u_{\tilde{g}}$ gaat dit op exact dezelfde wijze, met het verschil dat de hoek θ anders is, namelijk de hoek tussen \vec{k}_A en \vec{p}_2 . De hoek daartussen is gelijk aan $\pi - \theta$, wat een minteken verschil oplevert.

B Gebruikte Taylor-expansies

Zoals eerder vermeld, moeten de integralen, die gedefinieerd zijn in paragraaf 3.2, nog uitgewerkt worden op threshold. Dit houdt in dat ze tot op nulde orde in β_g met een Taylorexpansie geëxpandeerd moeten worden. Zoals in subparagraaf 5.2.2 uitgelegd is, bestaan er integralen van de vorm zoals gegeven in vergelijking (17). Daaruit volgt dat er functies zijn die tot de eerste orde in $\beta_{\tilde{g}}$ geëxpandeerd moeten worden. In deze bijlage worden deze expansies uitgevoerd. Eerst worden hiervoor een aantal definities geïntroduceerd. In de integralen staan vaak dilogarithmen. De definitie van een dilogaritme is [12]:

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \frac{\log(1-z)}{z} dz$$

De dilogarithmen voldoen aan de volgende rekenregels:

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(1-x) &= \frac{\pi^2}{6} - \log(x) \log(1-x) \\ \text{Li}_2(-1) &= -\frac{\pi^2}{12} \\ \text{Li}_2(0) &= 0 \\ \frac{\partial \text{Li}_2(x)}{\partial x} &= -\frac{\log(1-x)}{x} \end{aligned} \tag{31}$$

In de integralen komt ook vaak de uitdrukking $x_{\tilde{g}}$ voor. Deze uitdrukking is gedefinieerd als:

$$x_{\tilde{g}} = \frac{\beta_{\tilde{g}} - 1}{\beta_{\tilde{g}} + 1} \tag{32}$$

Hierbij moet ook opgemerkt worden dat de $\beta_{\tilde{g}}$ die hier gebruikt wordt aangepast is met definitie (16). Om precies te zijn is $\beta_{\tilde{g}}$ gedefinieerd als:

$$\beta_{\tilde{g}} = \sqrt{1 - \frac{4m_g^2}{s}} \tag{33}$$

Met het bovenstaande zullen nu de benodigde expansies uitgewerkt worden. De eerste uitdrukking die geëxpandeerd zal worden is $\log(x_{\tilde{g}})$:

$$\begin{aligned} \log(x_{\tilde{g}}) &= \log\left(\frac{\beta_{\tilde{g}} - 1}{\beta_{\tilde{g}} + 1}\right) \\ &\approx \log\left(\frac{\Re(\beta_{\tilde{g}}) - 1}{\Re(\beta_{\tilde{g}}) + 1} + i\delta\right)\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} + \frac{\partial}{\partial \beta_{\tilde{g}}} \log\left(\frac{\beta_{\tilde{g}} - 1}{\beta_{\tilde{g}} + 1}\right)\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}} \\ &= i\pi + \left(\frac{1}{\beta_{\tilde{g}} - 1} - \frac{1}{\beta_{\tilde{g}} + 1}\right)\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}} \\ &= i\pi - 2\beta_{\tilde{g}} \end{aligned}$$

De volgende uitdrukking die geëxpandeerd zal worden is $\log(1 + x_{\tilde{g}})$. De expansie hiervan wordt als volgt uitgewerkt:

$$\begin{aligned}\log(1 + x_{\tilde{g}}) &= \log\left(\frac{2\beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right) \\ &= \log(2\beta_{\tilde{g}}) - \log(1 + \beta_{\tilde{g}})\end{aligned}\tag{34}$$

In vergelijking (34) wordt de eerste term niet geëxpandeerd. De tweede term kan wel worden geëxpandeerd:

$$\begin{aligned}\log(1 + \beta_{\tilde{g}}) &\approx \log(1 + \beta_{\tilde{g}})\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} + \frac{\partial}{\partial \beta_{\tilde{g}}} \log(1 + \beta_{\tilde{g}})\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}} \\ &= \frac{1}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}} = \beta_{\tilde{g}}\end{aligned}$$

De volgende uitdrukking die geëxpandeerd gaat worden, laat zich niet direct oplossen met behulp van een Taylor-expansie:

$$\begin{aligned}\text{Li}_2(1 + x_{\tilde{g}}) &= \text{Li}_2\left(\frac{2\beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right) \\ &\approx \text{Li}_2\left(\frac{2\beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right)\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} + \frac{\partial}{\partial \beta_{\tilde{g}}} \text{Li}_2\left(\frac{2\beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right)\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}} \\ &= -\frac{\log\left(\frac{1 - \beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right)}{\beta_{\tilde{g}}(1 + \beta_{\tilde{g}})}\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}}\end{aligned}$$

Deze uitdrukking is niet gedefinieerd voor $\beta_{\tilde{g}} = 0$. Met behulp van de stelling van l'Hôpital wordt wel een antwoord verkregen:

$$\begin{aligned}-\frac{\log\left(\frac{1 - \beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right)}{\beta_{\tilde{g}}(1 + \beta_{\tilde{g}})}\Big|_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \beta_{\tilde{g}} &= \left(\lim_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} -\frac{\frac{\partial}{\partial \beta_{\tilde{g}}} \log\left(\frac{1 - \beta_{\tilde{g}}}{1 + \beta_{\tilde{g}}}\right)}{\frac{\partial}{\partial \beta_{\tilde{g}}} \beta_{\tilde{g}}(1 + \beta_{\tilde{g}})}\right) \cdot \beta_{\tilde{g}} \\ &= \left(\lim_{\beta_{\tilde{g}} \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1 - \beta_{\tilde{g}}^2}}{1 + 2\beta_{\tilde{g}}}\right) \cdot \beta_{\tilde{g}} \\ &= 2\beta_{\tilde{g}}\end{aligned}$$

In sommige gevallen is het handiger om de uitdrukking eerst om te schrijven. In de volgende situatie is dit gedaan met behulp van de substitutie $z = -x_{\tilde{g}}$ en vergelijking (31). Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
-\log(x_{\bar{g}}) \log(1 + x_{\bar{g}}) - \text{Li}_2(-x_{\bar{g}}) &= -\log(-z) \log(1 - z) - \text{Li}_2(z) \\
&= -(\log(z) + i\pi) \log(1 - z) - \text{Li}_2(z) \\
&= -\frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2(1 - z) - i\pi \log(1 - z) \\
&= -\frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2(1 + x_{\bar{g}}) - i\pi \log(1 + x_{\bar{g}}) \\
&= -\frac{\pi^2}{6} + 2\beta_{\bar{g}} - i\pi(\log(2\beta_{\bar{g}}) - \beta_{\bar{g}})
\end{aligned}$$

C Kleurontbinding van de botsingsdoorsnede

In deze bijlage worden de berekeningen uitgevoerd die gebruikt zijn om de botsingsdoorsnede te ontbinden in de kleurbasis. Hierbij zijn een aantal identiteiten gebruikt.

Voor f^{abc} en d^{abc} zijn dit de identiteiten [13]:

$$\begin{aligned}
d^{abb} &= f^{abb} = 0 \\
f^{acd} f^{bcd} &= 3\delta^{ab} = \text{Tr}(F^a F^b) \\
f^{acd} d^{bcd} &= 0 = \text{Tr}(F^a D^b) \\
d^{acd} d^{bcd} &= \frac{5}{3}\delta^{ab} = \text{Tr}(D^a D^b) \\
f^{abe} f^{cde} &= \frac{2}{3}(\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) + d^{ace}d^{bde} - d^{bce}d^{ade} \\
d^{abc} d^{cc_1c_2} + d^{c_1bc} d^{acc_2} + d^{c_2bc} d^{ac_1c} &= \frac{1}{3}(\delta^{ac_1}\delta^{c_2b} + \delta^{c_1c_2}\delta^{ab} + \delta^{ac_2}\delta^{c_1b})
\end{aligned} \tag{35}$$

en voor het spoor van drie generatoren [13]:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(F^a F^b F^c) &= i\frac{3}{2}f^{abc} \\
\text{Tr}(D^a F^b F^c) &= \frac{3}{2}d^{abc} \\
\text{Tr}(D^a D^b F^c) &= i\frac{5}{6}f^{abc} \\
\text{Tr}(D^a D^b D^c) &= -\frac{1}{2}d^{abc}
\end{aligned}$$

C.1 Dimensie van de basisstructuren

Hier zullen de dimensies van de basisstructuren uit paragraaf 6.2 berekend worden. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a_1 &= \left(\frac{1}{8}\delta^{ab}\delta^{c_1c_2}\right) \left(\frac{1}{8}\delta^{c_1c_2}\delta^{ab}\right) \\
&= \frac{1}{64}\delta^{ab}\delta^{c_1c_2}\delta^{c_1c_2}\delta^{ab} \\
&= \frac{1}{64}\delta^{aa}\delta^{c_1c_1} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 \cdot a_2 &= \left(\frac{3}{5}d^{abc}d^{cc_1c_2}\right) \left(\frac{3}{5}d^{c_1c_2d}d^{dab}\right) \\
&= \frac{9}{25}d^{cab}d^{cc_1c_2}d^{dc_1c_2}d^{dab} \\
&= \frac{3}{5}d^{cab}d^{dab}\delta^{cd} \\
&= \delta^{cc} = 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 \cdot a_3 &= \left(\frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \right) \left(\frac{1}{3} f^{c_1 c_2 d} f^{dab} \right) \\
&= \frac{1}{9} f^{cab} f^{cc_1 c_2} f^{dc_1 c_2} f^{dab} \\
&= \frac{1}{3} f^{cab} f^{dab} \delta^{cd} \\
&= \frac{1}{3} f^{cab} f^{cab} \\
&= \delta^{cc} = 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 \cdot a_4 &= \left(\frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \right) \left(\frac{1}{2} (\delta^{c_1 a} \delta^{c_2 b} - \delta^{c_2 a} \delta^{c_1 b}) - \frac{1}{3} f^{c_1 c_2 d} f^{dab} \right) \\
&= \frac{1}{4} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1})^2 + \left(\frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \right) \left(\frac{1}{3} f^{c_1 c_2 d} f^{dab} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) f^{c_1 c_2 d} f^{dab} \\
&= \frac{1}{4} ((\delta^{ac_1} \delta^{bc_2})^2 + (\delta^{ac_2} \delta^{bc_1})^2 - 2(\delta^{ac_1} \delta^{bc_2})(\delta^{ac_2} \delta^{bc_1})) + a_3 \cdot a_3 \\
&\quad - \frac{1}{3} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} f^{c_1 c_2 d} f^{dab} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1} f^{c_1 c_2 d} f^{dab}) \\
&= 36 - \frac{1}{3} (f^{dab} f^{dab} + f^{dab} f^{dab}) \\
&= 36 - 2\delta^{dd} = 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 \cdot a_5 &= \left(\frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} - \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{2} (\delta^{c_1 a} \delta^{c_2 b} + \delta^{c_2 a} \delta^{c_1 b}) - \frac{1}{8} \delta^{ba} \delta^{c_2 c_1} - \frac{3}{5} d^{c_1 c_2 d} d^{dab} \right) \\
&= \frac{1}{4} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1})^2 + \frac{1}{64} (\delta^{ab} \delta^{c_1 c_2})^2 + \left(\frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \right) \left(\frac{3}{5} d^{c_1 c_2 d} d^{dab} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} - \frac{3}{5} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) d^{abc} d^{cc_1 c_2} + \frac{3}{20} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \\
&= 43 - \frac{3}{5} (d^{abc} d^{abc} + d^{abc} d^{abc}) + \frac{3}{20} d^{aac} d^{cc_1 c_1} \\
&= 43 - 2\delta^{cc} = 27
\end{aligned}$$

C.2 Kleurontbinding van het matrixelement

Ontbinden van structuur (24) levert:

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot F_{c_2 c}^b F_{cc_1}^a &= \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} f^{bcc_2} f^{acc_1} \\
&= \frac{1}{8} f^{acc_1} f^{acc_1} \\
&= \frac{3}{8} \delta^{aa} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 \cdot F_{c_2 d}^b F_{d c_1}^a &= \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} \\
&= \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} f^{bc_2 d} f_{c_1 da} \\
&= -\frac{3}{5} D_{ac}^b D_{cc_2}^{c_1} F_{c_2 d}^b F_{da}^{c_1} \\
&= -\frac{3}{5} \text{Tr}(D^b D^{c_1} F^b F^{c_1}) \\
&= -\frac{3}{5} \text{Tr}(D^b D^{c_1} F^{c_1} F^b) + \frac{3}{5} i f^{c_1 b e} \text{Tr}(D^b D^{c_1} F^e) \\
&= -\frac{1}{2} f^{c_1 b e} f^{bc_1 e} \\
&= \frac{1}{2} f^{bc_1 e} f^{bc_1 e} = \frac{3}{2} \delta^{bb} = 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 \cdot F_{c_2 d}^b F_{d c_1}^a &= \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} \\
&= \frac{1}{3} f^{bac} f^{c_1 c c_2} f^{bc_2 d} f_{c_1 da} \\
&= \frac{1}{3} F_{ac}^b F_{cc_2}^{c_1} F_{c_2 d}^b F_{da}^{c_1} \\
&= \frac{1}{3} \text{Tr}(F^b F^{c_1} F^b F^{c_1}) \\
&= \frac{1}{3} \text{Tr}(F^b F^{c_1} F^{c_1} F^b) - \frac{1}{3} i f^{c_1 b e} \text{Tr}(F^b F^{c_1} F^e) \\
&= \text{Tr}(F^b F^b) + \frac{1}{2} f^{c_1 b e} f^{bc_1 e} \\
&= 3\delta^{bb} - \frac{3}{2} \delta^{bb} = 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 \cdot F_{c_2 d}^b F_{d c_1}^a &= \left(\frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \right) f^{bdc_2} f^{adc_1} \\
&= \frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1} f^{bdc_2} f^{adc_1}) - \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} \\
&= \frac{1}{2} (f^{bdb} f^{ada} - f^{bda} f^{adb}) - 12 \\
&= \frac{1}{2} f^{bda} f^{bda} - 12 \\
&= \frac{3}{2} \delta^{bb} - 12 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 \cdot F_{c_2 d}^b F_{d c_1}^a &= \left(\frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} - \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \right) f^{bdc_2} f^{adc_1} \\
&= \frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1} f^{bdc_2} f^{adc_1}) - \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} - \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} f^{bdc_2} f^{adc_1} \\
&= -\frac{3}{2} \delta^{bb} - 15 = -27
\end{aligned}$$

Ontbinden van structuur (25) levert:

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot F_{c_2 c}^a F_{cc_1}^b &= \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} f^{acc_2} f^{bcc_1} \\
&= \frac{1}{8} f^{acc_1} f^{acc_1} \\
&= \frac{3}{8} \delta^{aa} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 \cdot F_{c_2 d}^a F_{dc_1}^b &= \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} \\
&= \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} f^{ac_2 d} f^{c_1 db} \\
&= -\frac{3}{5} D_{bc}^a D_{cc_2}^{c_1} F_{c_2 d}^a F_{db}^{c_1} \\
&= -\frac{3}{5} \text{Tr}(D^a D^{c_1} F^{c_1} F^a) + \frac{3}{5} i f^{c_1 a e} \text{Tr}(D^a D^{c_1} F^e) \\
&= -\frac{1}{2} f^{c_1 a e} f^{ac_1 e} \\
&= \frac{1}{2} f^{ac_1 e} f^{ac_1 e} = \frac{3}{2} \delta^{aa} = 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 \cdot F_{c_2 d}^a F_{dc_1}^b &= \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} \\
&= -\frac{1}{3} f^{abc} f^{c_1 cc_2} f^{ac_2 d} f^{c_1 db} \\
&= -\frac{1}{3} F_{bc}^a F_{cc_2}^{c_1} F_{c_2 d}^a F_{db}^{c_1} \\
&= -\frac{1}{3} \text{Tr}(F^a F^{c_1} F^a F^{c_1}) \\
&= -\frac{1}{3} \text{Tr}(F^a F^{c_1} F^{c_1} F^a) + \frac{1}{3} i f^{c_1 a e} \text{Tr}(F^a F^{c_1} F^e) \\
&= -\text{Tr}(F^a F^a) - \frac{1}{2} f^{c_1 a e} f^{ac_1 e} \\
&= -3\delta^{aa} + \frac{3}{2} \delta^{aa} = -12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 \cdot F_{c_2 d}^a F_{dc_1}^b &= \left(\frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} \right) f^{adc_2} f^{bdc_1} \\
&= \frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} - \delta^{ac_2} \delta^{bc_1} f^{adc_2} f^{bdc_1}) - \frac{1}{3} f^{abc} f^{cc_1 c_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} \\
&= \frac{1}{2} (f^{adb} f^{bda} - f^{ada} f^{bdb}) + 12 \\
&= -\frac{1}{2} f^{bda} f^{bda} + 12 \\
&= -\frac{3}{2} \delta^{bb} + 12 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 \cdot F_{c_2 d}^a F_{dc_1}^b &= \left(\frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1}) - \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} - \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} \right) f^{adc_2} f^{bdc_1} \\
&= \frac{1}{2} (\delta^{ac_1} \delta^{bc_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} + \delta^{ac_2} \delta^{bc_1} f^{adc_2} f^{bdc_1}) - \frac{1}{8} \delta^{ab} \delta^{c_1 c_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} - \frac{3}{5} d^{abc} d^{cc_1 c_2} f^{adc_2} f^{bdc_1} \\
&= -\frac{3}{2} \delta^{bb} - 15 = -27
\end{aligned}$$

Referenties

- [1] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, 2011.
- [2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Gluino>, 2011.
- [3] W. Beenakker, “Qft-dictaat.” [http://www.hef.kun.nl/ beenakker/](http://www.hef.kun.nl/beenakker/), 2011.
- [4] R. K. Ellis and G. Zanderighi, *Scalar one-loop integrals for QCD*, *JHEP* **02** (2008) 002, [[arXiv:0712.1851](https://arxiv.org/abs/0712.1851)].
- [5] W. Beenakker, R. Hopker, M. Spira, and P. M. Zerwas, *Squark and gluino production at hadron colliders*, *Nucl. Phys.* **B492** (1997) 51–103, [[hep-ph/9610490](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9610490)].
- [6] R. Bonciani, S. Catani, M. L. Mangano, and P. Nason, *NLL resummation of the heavy-quark hadroproduction cross-section*, *Nucl. Phys.* **B529** (1998) 424–450, [[hep-ph/9801375](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9801375)].
- [7] W. Beenakker *et. al.*, *Soft-gluon resummation for squark and gluino hadroproduction*, *JHEP* **12** (2009) 041, [[arXiv:0909.4418](https://arxiv.org/abs/0909.4418)].
- [8] M. Beneke, P. Falgari, and C. Schwinn, *Soft radiation in heavy-particle pair production: all-order colour structure and two-loop anomalous dimension*, *Nucl. Phys.* **B828** (2010) 69–101, [[arXiv:0907.1443](https://arxiv.org/abs/0907.1443)].
- [9] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM*, [math-ph/0010025](https://arxiv.org/abs/math-ph/0010025).
- [10] **D0** Collaboration, S. Abachi *et. al.*, *Observation of the top quark*, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2632–2637, [[hep-ex/9503003](https://arxiv.org/abs/hep-ex/9503003)].
- [11] A. Kulesza and L. Motyka, *Soft gluon resummation for the production of gluino-gluino and squark-antisquark pairs at the LHC*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 095004, [[arXiv:0905.4749](https://arxiv.org/abs/0905.4749)].
- [12] <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/SpecialFunctions.html>, 2011.
- [13] R. Cutler and D. W. Sivers, *Quantum Chromodynamic Gluon Contributions to Large $p(T)$ Reactions*, *Phys. Rev.* **D17** (1978) 196.
- [14] A. Kulesza and L. Motyka, *Threshold resummation for squark-antisquark and gluino-pair production at the LHC*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 111802, [[arXiv:0807.2405](https://arxiv.org/abs/0807.2405)].
- [15] J. van den Boogaard, “Colour structures in Supersymmetric QCD.” <http://www.ru.nl/thef/research/research/>, 2010.
- [16] M. Drees, *An Introduction to supersymmetry*, [hep-ph/9611409](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9611409).
- [17] M. Czakon, A. Mitov, and G. F. Sterman, *Threshold Resummation for Top-Pair Hadroproduction to Next-to-Next-to-Leading Log*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 074017, [[arXiv:0907.1790](https://arxiv.org/abs/0907.1790)].