“Weyl die Theorie der Eichinvarianz sehr schön ist” en fysische argumenten voor het ijkprincipe

Pim van Oirschot

Inhoudsopgave

1 Voorwoord en onderzoeksvraag

Symmetrietransformaties zijn injectieve functies die op hun eigen domein afbeelden en die alle relevante structuren intakt laten. De verzameling van alle symmetrietransformaties vormt een wiskundige groep, de symmetriegroep.
In het hoofdstuk 'IJkinvariantie' van deze scriptie zal duidelijk worden dat de symmetriegroep van de vrije Dirac-theorie globale ijktransformaties bevat. Ik zal laten zien dat de bijbehorende Lagrange-dichtheid globaal invariant is onder symmetrietransformaties: $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi \Rightarrow \mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$

Het zogenaamde ijkprincipe postuleert dat de symmetriegroep van de vrije Dirac-theorie *lokale* ijktransformaties bevat. Met andere woorden, invariantie van de Lagrange-dichtheid onder symmetrietransformaties is niet slechts globaal geldig, maar ook lokaal: $\psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \Rightarrow \mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$.
In het hoofdstuk 'IJkinvariantie' zal ik verder laten zien dat uit het ijkprincipe een beschrijving volgt van interacties tussen fundamentele velden die elementaire deeltjes beschrijven (zoals elektronen, quarks, ijkbosonen, et cetera).

Mijn onderzoeksvraag luidt: *Welke fysische argumenten rechtvaardigen dit principe, dat ook wel het principe van lokale ijkinvariantie wordt genoemd?*

Om een antwoord te vinden op deze vraag, ben ik de wetenschappelijke literatuur ingedoken. Omdat er een beschrijving van interacties tussen fundamentele velden uit volgt, wordt in veel studieboeken het begrip lokale ijkinvariantie behandeld. Er zijn in de literatuur dan ook al vrij snel antwoorden op deze vraag te vinden, echter meestal zijn deze antwoorden onbevredigend. Een tweetal voorbeelden hiervan vindt u in het hoofdstuk 'Onbevredigende antwoorden'.

Een deel van mijn onderzoek is een historisch literatuuronderzoek geweest. Hierover kunt u lezen in het hoofdstuk 'Historisch onderzoek'. Tot slot zal ik in het hoofdstuk 'Nieuwe blik op Weyl's theorie' mijn historisch literatuuronderzoek met de moderne fysica uit het hoofdstuk 'Theoretische achtergrond' combineren om tot een wel-bevredigend antwoord op mijn onderzoeksvraag te komen.

2 Theoretische achtergrond

In dit hoofdstuk zal ik enkele begrippen en definities uit de Hoge Energie Fysica behandelen. Het startpunt hierbij was voor mij het vak Quantummechanica 3 (ref. 5).

2.1 Chiraliteit en Weyl-spinoren

Een Dirac-spinor is een oplossing van de Dirac-vergelijking, de relativistische kwantummechanische golfvergelijking voor massieve spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes. Een Dirac-spinor wordt geschreven als:

$$\psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x},t) \\ \vdots \\ \psi_4(\vec{x},t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

De Dirac-vergelijking voor een vrij spin-$\frac{1}{2}$ deeltje met massa m is:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta mc^2 \right)\psi(\vec{x},t) = 0 \tag{2}$$

Het massaloze geval

Als we te maken hebben met een massaloos deeltje is het mogelijk om te kiezen voor een tweedimensionale $\psi(\vec{x},t)$, die een Weyl-spinor wordt genoemd. De Dirac-vergelijking is dan te schrijven als een Schrödingerachtige vergelijking:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \hat{H}\psi(\vec{x},t) = c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}\psi(\vec{x},t) \tag{3}$$

waarin $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$. De bijbehorende matrices $\vec{\alpha}$ zijn dan 2×2 matrices en de matrix β valt eruit omdat $m = 0$.
Het is eenvoudig in te zien dat bovenstaande golfvergelijking inderdaad een geschikte kandidaat is voor een relativistische, kwantummechanische golfvergelijking, indien we de matrices $\vec{\alpha}$ associëren met de Pauli-spinmatrices $\vec{\sigma}$, gegroepeerd in een 3D-vector $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$:

- $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ omdat de Pauli-spinmatrices hermitisch zijn. Hiermee wordt behoud van waarschijnlijkheid gegarandeerd.
- Er wordt voldaan aan de Klein-Gordon vergelijking $\Box\psi(\vec{x},t) = 0$, waarbij

  $$\Box = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right)$$

  zodat de theorie inderdaad deeltjes beschrijft die zich met de lichtsnelheid voortbewegen.

Voor het bewijs hiervan gebruiken we dat er twee mogelijke oplossingen zijn, namelijk $\alpha^j = +\sigma^j$ en $\alpha^j = -\sigma^j$ waarvoor geldt dat $\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk}I$. De twee mogelijke tekens van α^j zorgen ervoor dat er twee verschillende spinoren zijn die aan de Klein-Gordon vergelijking voldoen. Als $\alpha^j = +\sigma^j$ dan noemen we de bijbehorende spinor $\psi_R(\vec{x}, t)$ en als $\alpha^j = -\sigma^j$ dan noemen we de spinor $\psi_L(\vec{x}, t)$. Het bewijs dat er voldaan wordt aan de Klein-Gordon vergelijking gaat als volgt:

$$0 = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{x}, t) \tag{4}$$

$$= (-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\hbar^2 c^2}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\{\alpha^j, \alpha^k\}\nabla^j\nabla^k)\psi(\vec{x}, t) \tag{5}$$

$$= -\hbar^2 c^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\psi(\vec{x}, t) \Rightarrow \Box\psi(\vec{x}, t) = 0 \tag{6}$$

Het massieve geval

Voor het massieve geval moeten we opniew dezelfde stappen doorlopen om te controleren of we te maken hebben met een geschikte kandidaat voor een relativistische, kwantummechanische golfvergelijking. We moeten dus controleren dat $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ en dat de Klein-Gordon vergelijking geldt. Het blijkt dat we in dit geval moeten werken met de vierdimensionale Dirac-spinoren (1) en dat we 4×4 matrices α^1, α^2 en α^3 nodig hebben, gegroepeerd in $\vec{\alpha}$. Ook de matrix β hebben we nodig, die is in dit geval niet 0 en moet anticommuteren met α^1, α^2 en α^3 (ref. 5). Er bestaan oneindig veel verschillende, fysisch equivalente representaties voor de matrices $\vec{\alpha}$ en β. In de zogenaamde Weyl-representatie (ook wel chirale representatie genaamd) worden de matrices $\vec{\alpha}$ en β gecombineerd tot de γ-matrices van Weyl (ref. 4):

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \emptyset & I \\ I & \emptyset \end{pmatrix}, \quad \beta\vec{\alpha} = \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \emptyset \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & \emptyset \\ \emptyset & I \end{pmatrix} \tag{7}$$

Hierin is I de 2×2 eenheidsmatrix en de matrices $\vec{\sigma}$ zijn de Pauli-spinmatrices, wederom gegroepeerd in een 3D-vector $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ De matrix $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ is een Hermitische matrix die anticommuteert met de overige vier γ-matrices, die compact worden genoteerd als γ^μ, met $\mu = 0, 1, 2, 3$. Bovendien voldoet γ_5 aan de relaties:

$$\gamma_5^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_5 \text{ heeft eigenwaarden} \pm 1 \tag{8}$$

De γ_5-eigenwaarde noemen we de chiraliteit: is de eigenwaarde +1 dan is de chiraliteit rechtshandig, is de eigenwaarde -1 dan is de chiraliteit linkshandig.

We definieren de projectie-operatoren P_R en P_L als:

$$P_R\psi(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{2}(I + \gamma_5)\psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\text{en} \qquad P_L\psi(\vec{x},t) \equiv \frac{1}{2}(I-\gamma_5)\psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \psi_L(\vec{x},t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

P_R projecteert $\psi(\vec{x},t)$ op een eigenvector van γ_5 bij eigenwaarde $+1$, P_L projecteert $\psi(\vec{x},t)$ op een eigenvector van γ_5 bij eigenwaarde -1. De vierdimensionale Dirac-spinor $\psi(\vec{x},t)$ uit (1) splitst in de Weyl-respresentatie dus op in twee tweedimensionale Weyl-spinoren. De ene Weyl-spinor hoort bij een deeltje met rechtshandige chiraliteit, de ander bij een deeltje met linkshandige chiraliteit:

$$\psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \psi_L(\vec{x},t) \\ \psi_R(\vec{x},t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

In deze Weyl-representatie wordt het ook duidelijk waarom we de twee verschillende oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking in het massaloze geval hebben geässocieerd met $\psi_R(\vec{x},t)$ voor $\alpha^j = +\sigma^j$ en met $\psi_L(\vec{x},t)$ voor $\alpha^j = -\sigma^j$. Vermenigvuldigen we de matrices $\vec{\alpha} = \beta\vec{\gamma}$ namelijk met een Dirac-spinor, dan gaat dit in het geval van deeltjes met rechtshandige chiraliteit over in $+\vec{\sigma}\ \psi_R(\vec{x},t)$ en in het geval van een deeltje met een linkshandige chiraliteit in $-\vec{\sigma}\ \psi_L(\vec{x},t)$.

2.2 Heliciteit

De heliciteit van een deeltje wordt gedefiniëerd als zijn spin geprojecteerd op de bewegingsrichting, in plaats van op een vaste as. De heliciteit is de eigenwaarde van de heliciteitsoperator $\hat{h}$:

$$\hat{h} \equiv \frac{\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{p}}}{|\hat{\vec{p}}|} = \hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_p \tag{12}$$

Deze operator kan ook worden geschreven met de totale impulsmomentoperator $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ in plaats van de spinoperator $\hat{\vec{S}}$, omdat de bijdrage van de baanimpulsmomentoperator verdwijnt: $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{p}} = (\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}) \cdot \hat{\vec{p}} = 0$. Ongeacht de spin s van een deeltje, als het deeltje massaloos is kan de heliciteit slechts twee mogelijke waarden aannemen: $+s\hbar$ of $-s\hbar$.

De heliciteit voor een spin $\frac{1}{2}$ deeltje met $m = 0$ is equivalent aan de chiraliteit vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}\hbar$. Dit is als volgt in te zien:

De heliciteitsoperator $\hat{h}$ in de Dirac-theorie is

$$\hat{h} \equiv \frac{1}{2}\hbar\ \vec{\Sigma} \cdot \vec{e}_p, \qquad \text{met} \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{13}$$

De Dirac-vergelijking voor een vrij spin-$\frac{1}{2}$ deeltje met $m = 0$ wordt gegeven door (3). De tijdsonafhankelijke Hamilton-operator hangt dus niet van $\vec{x}$ af, dat wil zeggen $[\hat{H}, \hat{\vec{p}}] = 0$. Derhalve zijn er oplossingen te vinden die simultane eigenfuncties zijn van $\hat{H}$ en $\hat{\vec{p}}$:

$$\psi_p(x) = u(\vec{p})\exp(-ip \cdot x/\hbar), \tag{14}$$

waarbij x de plaatsviervector is en de eigenwaarden E van $\hat{E} = i\hbar\partial/\partial t$ en $\vec{p}$ van $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ verwerkt zijn in de contravariante impulsvector p^μ zodanig dat $p^0 = E/c$. Deze stationaire vlakke-golf oplossingen moeten voldoen aan de Dirac-vergelijking:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi_p(x) = \exp(-ip\cdot x/\hbar)\gamma^\mu p_\mu u(\vec{p}) = 0, \tag{15}$$

waarin $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ de gradiënt in de Minkowski-ruimte is. Hieruit volgt:

$$\gamma^0 p^0 u(\vec{p}) = \vec{\gamma}\cdot\vec{p}\; u(\vec{p}). \tag{16}$$

Omdat voor een massaloos deeltje $p^0 = |\vec{p}|$, kunnen we $u(\vec{p})$ dus schrijven als:

$$u(\vec{p}) = \frac{\gamma^0\;\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\; u(\vec{p}) \tag{17}$$

en daarmee $\psi_p(x)$ als:

$$\psi_p(x) = \frac{\gamma^0\;\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_p(x). \tag{18}$$

Zodoende kunnen we nu een uitdrukking voor γ_5 bepalen:

$$\gamma_5\;\psi_p(x) = \gamma_5\frac{\gamma^0\;\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_p(x) = \frac{1}{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \emptyset & -I \\ I & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & \emptyset \end{pmatrix}\;\psi_p(x) \tag{19}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_p & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_p \end{pmatrix}\psi_p(x) = \vec{\Sigma}\cdot\vec{e}_p\;\psi_p(x) \tag{20}$$

Chiraliteit is in dit geval dus de eigenwaarde van $\vec{\Sigma}\cdot\vec{e}_p$. Vermenigvuldigen we deze eigenwaarde met $\frac{1}{2}\hbar$ dan vinden we precies de eigenwaarde van de heliciteitsoperator $\hat{h}$ uit (13).

Massaloze deeltjes met een positieve heliciteit zijn dus deeltjes met rechts-handige chiraliteit, massaloze deeltjes met negatieve heliciteit zijn deeltjes met linkshandige chiraliteit. Voor deeltjes met massa $m \neq 0$ gelden bovenstaande vergelijkingen niet, dus moet er voor die deeltjes een onderscheid gemaakt worden tussen chiraliteit en heliciteit.

3 IJkinvariantie

Zoals al in het voorwoord is aangekondigd, zal ik in dit hoofdstuk laten zien wat de gevolgen zijn van globale en lokale ijkinvariantie. Vanaf nu zal ik zal in deze scriptie natuurlijke eenheden gebruiken: $\hbar = c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$. Dit kan worden gerealiseerd door deze constanten te absorberen in de relevante velden en grootheden. De meeste informatie heb ik gehaald uit ref. 6.

3.1 Globale ijkinvariantie

De vrije Dirac-Lagrange dichtheid is:

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{21}$$

Hierin is $\psi = \psi(\vec{x}, t)$ een Dirac-spinor en $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ de zogenaamde geadjungeerde Dirac-spinor. In deze paragraaf beschouwen we een globale ijktransformatie:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi \qquad \text{en} \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \tag{22}$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ per definitie onafhankelijk is van x^μ.

Globale ijktransformaties rechtstreeks toegepast op $\mathcal{L}_D$

Het is vrij snel in te zien dat de vrije Dirac-Lagrange dichtheid (21) invariant is onder globale ijktransformaties (22). Hiertoe bekijken we infinitesimale globale ijktransformaties:

$$\psi \to \psi' = e^{i\delta\alpha}\psi \qquad \text{en} \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{-i\delta\alpha}\bar{\psi}. \tag{23}$$

Onder zo'n infinitesimale ijktransformatie transfomeert de vrije Dirac-Lagrange dichtheid als: $\mathcal{L}_D \to \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D + \delta\mathcal{L}_D$. Er is direct af te leiden dat $\delta\mathcal{L}_D = 0$.

Voor deze afleiding dat $\delta\mathcal{L}_D = 0$, en dus dat $\mathcal{L}_D$ invariant is onder globale ijktransformaties gebruiken we een eerste orde Taylor-benadering: $e^{\pm i\delta\alpha} \approx 1 \pm i\delta\alpha$.

$$\mathcal{L}_D \to \mathcal{L}'_D = i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \tag{24}$$

$$= i\bar{\psi}(1 - i\delta\alpha)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(1 + i\delta\alpha) - m\bar{\psi}(1 - i\delta\alpha)\psi(1 + i\delta\alpha) \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \delta\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \delta\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i(\delta\alpha)^2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &\quad - m\bar{\psi}\psi - i\delta\alpha m\bar{\psi}\psi + i\delta\alpha m\bar{\psi}\psi - (\delta\alpha)^2 m\bar{\psi}\psi \end{aligned} \tag{26}$$

$$= \mathcal{L}_D + (\delta\alpha)^2\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_D + \delta\mathcal{L}_D \approx \mathcal{L}_D \tag{27}$$

Waar we $\delta\mathcal{L}_D$ hebben gedefinieerd als $(\delta\alpha)^2\mathcal{L}_D$, en dit is nul in een eerste orde benadering.

Implicaties van globale ijktransformaties voor oplossingen van de bewegingsvergelijking (behorende bij $\mathcal{L}_D$)

De bewegingsvergelijkingen behorende bij een Lagrange dichtheid $\mathcal{L}(\phi_1, \ldots, \phi_n, \partial_\mu\phi_1, \ldots, \partial_\mu\phi_n)$ wordt gegeven door de Euler-Lagrange vergelijkingen:

$$\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)}\Big) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_j} \tag{28}$$

Met behulp van deze Euler-Lagrange vergelijkingen volgt uit de vrije Dirac-Lagrange dichtheid (21) dat $\delta\mathcal{L}_D = -(\delta\alpha)\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi]$.

Bewijs: Stel we schrijven de $\delta\mathcal{L}_D$ uit $\mathcal{L}_D + \delta\mathcal{L}_D$ als:

$$\delta\mathcal{L}_D = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\ \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \tag{29}$$

We kunnen de $\delta(\partial_\mu\psi)$ en de $\delta(\partial_\mu\bar{\psi})$ schrijven als respectievelijk $\partial_\mu(\delta\psi)$ en $\partial_\mu(\delta\bar{\psi})$, zodat er na handig hergroeperen staat:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_D = {} & \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\ \delta\psi\Big) + \Big[\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\psi} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big)\Big]\ \delta\psi \\ & + \partial_\mu\Big(\delta\bar{\psi}\ \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big) +\ \delta\bar{\psi}\ \Big[\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{30}$$

Gebruiken we nu de Euler-Lagrange-vergelijking (28) voor ψ en $\bar{\psi}$, definiëren we $\delta\psi$ als $i(\delta\alpha)\psi$ en $\delta\bar{\psi}$ als $-i(\delta\alpha)\bar{\psi}$ dan vinden we:

$$\delta\mathcal{L}_D = i(\delta\alpha)\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big) \tag{31}$$

Met behulp van de vrije Dirac-Lagrange dichtheid (21) vinden we dus:

$$\delta\mathcal{L}_D = i(\delta\alpha)\partial_\mu[i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - 0] = -(\delta\alpha)\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] \tag{32}$$

Noether's theorema: Als $\mathcal{L}$ globaal ijkinvariant is, dan is er een behouden stroom.

In het eerste deel van deze paragraaf hebben we inderdaad gezien dat $\mathcal{L}_D$ globaal ijkinvariant is, omdat $\delta\mathcal{L}_D = 0$. Dus moet er een behouden stroom zijn. Op grond van het tweede deel van deze paragraaf weten we nu ook dat uit de globale ijkinvariantie volgt $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$. De behouden stroom is dus evenredig met $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$!

3.2 Elektromagnetisch stroombehoud

In de vorige paragraaf hebben we gekeken naar de implicaties van globale ijktransformaties voor oplossingen van de bewegingsvergelijking (behorende bij $\mathcal{L}_D$) en we kwamen tot de conclusie dat $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ een behouden stroom is. In deze paragraaf zullen we zien dat dit ook rechtstreeks terug te vinden is in de bewegingsvergelijkingen. Uit (21) en (28) volgt:

$$\partial_\mu\Big(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} = -\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} = 0 \tag{33}$$

Dit is precies gelijk aan de Dirac-vergelijking (2) met de conventie van natuurlijke eenheden:

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0 \tag{34}$$

Differentiëren we $\mathcal{L}_D$ naar ψ in plaats van naar $\bar{\psi}$, dan vinden we op dezelfde manier de geadjungeerde Dirac-vergelijking:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{35}$$

Vermenigvuldig (35) van rechts met ψ en (34) van links met $\bar{\psi}$, dan volgt na optellen:

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \tag{36}$$

Dus, als ψ en $\bar{\psi}$ oplossingen zijn van de Dirac-vergelijking, dan moet $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ automatisch een behouden stroom zijn!

Vermenigvuldigd met de fermionlading q is deze stroom te interpreteren als elektromagnetische 4-stroom: $j^\mu \equiv (\rho\ ,\ \vec{j}) = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. De nulde component van deze 4-stroom is te associëren met de ladingsdichtheid ρ, omdat $\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$ in een niet-relativistische context te interpreteren is als waarschijnlijkheidsdichtheid en in een relativistische context te schrijven is als de dichtheidsoperator behorende bij het verschil tussen het aantal fermionen en het aantal antifermionen.

Na het definiëren van de elektromagnetische 4-vectorpotentiaal $A^\mu \equiv (\phi\ ,\ \vec{A})$, zijn de Maxwell-vergelijkingen in de volgende compacte covariante vorm te gieten:

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \tag{37}$$

Als nu ∂_μ op deze golfvergelijking wordt losgelaten, dan volgt onmiddelijk dat de elektromagnetische 4-stroom aan de gewenste continuïteitsvergelijking $\partial_\mu j^\mu = 0$ moet voldoen.

De lading $\quad Q(t) \equiv \int j^0(\vec{x},t)\,\mathrm{d}\vec{x} = q\int \bar{\psi}\gamma^0\psi\,\mathrm{d}\vec{x} \quad$ is nu een behouden grootheid:

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\partial j^0(\vec{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int (\partial_\mu j^\mu(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t))\,\mathrm{d}\vec{x} \tag{38}$$

Omdat we weten uit (36) dat de stroom j^μ behouden is: $\partial_\mu j^\mu(\vec{x},t) = 0$, vinden we met behulp van de divergentiestelling van Gauss:

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\int \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}\vec{x} = -\int_A \vec{j}(\vec{x},t)\cdot\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{39}$$

Hierin is A het oppervlak van de ruimte waarover je integreert. De integraal wordt 0, omdat $\bar{\psi}(\vec{x},t)$ en $\psi(\vec{x},t)$ naar nul gaan als $|\vec{x}| \to \infty$: $j(\vec{x},t)$ gaat dan ook naar nul als $|\vec{x}| \to \infty$.

3.3 Lokale ijkinvariantie

Een lokale ijktransformatie is gedefinieerd als:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \qquad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi} \tag{40}$$

waarbij $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ nu dus per definitie wel afhankelijk is van x^μ. Wederom is $\psi = \psi(\vec{x}, t) \equiv \psi(x)$ een Dirac-spinor en $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ de geadjungeerde Dirac-spinor.

De vrije Dirac-Lagrange dichtheid transformeert nu als:

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\alpha(x)) \tag{41}$$

Het ijkprincipe, zoals geïntroduceerd in het voorwoord, is dus alleen geldig indien:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\alpha(x)) = 0 \tag{42}$$

Alleen dan is de vrije Dirac-Lagrange dichtheid namelijk locaal ijkinvariant.
Maar ten opzichte van een globale ijktransformatie, bevat de afgeleide $\partial_\mu\psi$ na een lokale ijktransformatie precies een term $ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x)$ teveel:

$$\partial_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) \tag{43}$$

Er zou lokale ijkinvariantie gelden indien de Lagrange dichtheid een covariante afgeleide zou bevatten:

$$D_\mu\psi \rightarrow D'_\mu\psi' \equiv e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \tag{44}$$

Om de afgeleide D_μ die aan deze eigenschappen voldoet te definiëren moeten we een vectorveld A_μ introduceren dat onder Lorentz-transformaties dezelfde transformatiekarakteristiek heeft als ∂_μ. Dit vectorveld A_μ heeft ijktransformatie-eigenschappen zodanig dat de ongewenste term in de getransformeerde afgeleide verdwijnt:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu \qquad \text{met} \qquad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x). \tag{45}$$

Hierin is g een koppelingsconstante.

Met deze covariante afgeleide in de Lagrange dichtheid volgt:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}_D - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{46}$$

Een nieuwe Lagrange dichtheid van de vorm $\mathcal{L}'_D$ in (41) met $\partial_\mu\alpha(x) = gA_\mu$.
Deze Lagrange dichtheid is volgens (44) locaal ijkinvariant, omdat:

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &= [\partial_\mu + ig(A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x))]e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi) + e^{i\alpha(x)}[igA_\mu\psi - i\psi(\partial_\mu\alpha(x))] \\ &= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + igA_\mu)\psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \end{aligned} \tag{47}$$

3.4 Elektromagnetische interacties

In deze paragraaf zal ik laten zien wat de gevolgen zijn van lokale ijkinvariantie.

Als $g = q$ in (46), dan staat er:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D - j^\mu A_\mu \tag{48}$$

Van de vrije Dirac-Lagrange dichtheid is precies de potentiële energie afgetrokken van een deeltje met lading q dat zich beweegt in een elektromagnetisch veld beschreven door de potentiaal A^μ. Als we nu ook nog de kinetische energie behorende bij de deeltjes beschreven door A^μ erbij optellen, dan vinden we de Lagrange dichtheid van de Quantum Elektrodynamica, waaruit de Maxwell-vergelijkingen zijn af te leiden:

$$\mathcal{L}_{QED} \equiv \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{e.m.} \tag{49}$$

$$\text{Met} \quad \mathcal{L}_{e.m.} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu . \tag{50}$$

Hierin is $F^{\mu\nu}$ de veldsterktetensor, gedefiniëerd als:

$$\begin{aligned} igF_{\mu\nu} &\equiv [D_\mu, D_\nu] \\ &= (\partial_\mu + igA_\mu)(\partial_\nu + igA_\nu) - (\partial_\nu + igA_\nu)(\partial_\mu + igA_\mu) \\ &= ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{51}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de veldsterktetensor ijkinvariant is.

Bij het vectorveld dat is ontstaan hoort een deeltje dat een kracht overbrengt: het zogenaamde ijkboson. In het geval van de elektromagnetische kracht is dat het foton. We hebben nu dus een *lokale* ijktheorie van elektromagnetische interacties gevonden.

3.5 Uitbreiding naar andere ijkgroepen

De ijktheorieën die ook zwakke en sterke interacties beschrijven, zijn relatief eenvoudige uitbreidingen van de procedure die geldt voor elektromagnetisme.

Elementaire spin-$\frac{1}{2}$ materiedeeltjes die via de zwakke en sterke kernkrachten met elkaar in wisselwerking staan kunnen worden gegroepeerd in zogenaamde multiplets. Er is sprake van doublets voor de zwakke interactie, bijvoorbeeld

$$\text{leptondoublets} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \qquad \text{of quarkdoublets} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{52}$$

en quarktriplets voor de sterke interactie:

$$\begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix} \tag{53}$$

Daarom zijn we nu niet meer alleen geïnteresseerd in veranderingen in de fase van de Dirac-spinoren, maar ook in unitaire (basis)transformaties binnen de ruimte opgespannen door de multiplets. We bekijken daartoe een fasetransformatie van de vorm:

$$\Psi \to \Psi' = \exp\,(i \sum_{a=1}^{N_\mathrm{g}} \alpha^a \mathbf{M}^a)\ \Psi \tag{54}$$

waarin de generatoren $\mathbf{M}^a$ $(a = 1, \ldots, N_\mathrm{g})$ hermitische $N \times N$ matrices zijn, met N de dimensionaliteit van het multiplet:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{55}$$

In deze multiplet zijn alle ψ_j's Dirac-spinoren $\psi_j = \psi_j(\vec{x}, t)$.

In het geval dat $\mathbf{M}^a \in U(1)$ geldt $N_\mathrm{g} = 1$ en kunnen we met deze fasetransformatie de elektromagnetische interacties beschrijven. Voor de zwakke en sterke interacties hebben we te maken met hermitische $N \times N$ matrices waarvoor $\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^a) = 0$: elementen van de groepen $SU(N)$. Er zijn in dat geval dus $N_\mathrm{g} = (N^2 - 1)$ generatoren.

Zwakke interacties hebben als ijkgroep $SU(2)$, omdat de deeltjes van die interactie worden gegroepeerd in doublets. De bijbehorende drie generatoren zijn de Pauli-spinmatrices. De drie ijkbosonen zijn W^+, W^- en Z^0.

Sterke interacties hebben als ijkgroep $SU(3)$, omdat de deeltjes van deze interactie worden gegroepeerd in triplets. In dat geval zijn er acht generatoren, en de bijbehorende acht ijkbosonen zijn de gluonen.

Het standaardmodel beschrijft hoe alle tot nu toe bekende elementaire deeltjes via de elektromagnetische, zwakke, en sterke kracht met elkaar in wisselwerking staan. Dit model is gebaseerd op een lokale ijktheorie behorende bij de symmetriegroep $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$.

4 Onbevredigende antwoorden

Nu terug naar mijn onderzoeksvraag. We hebben gezien dat het ijkprincipe prettige gevolgen heeft: we kunnen er een beschrijving van interacties tussen fundamentele velden uit afleiden. Maar op grond van welke fysische argumenten, anders dan "Het werkt zo mooi voor de Quantum Elektrodynamica.", kunnen we dit ijkprincipe rechtvaardigen? Er zijn in de literatuur enkele onbevredigende antwoorden te vinden op deze vraag. Onderstaande twee argumenten zijn daar een voorbeeld van. Hierover heb ik gelezen in ref. 7.

4.1 Het "lokale velden, dus lokale ijk" argument

Men rechtvaardigt het ijkprincipe wel eens door het als een soort lokaliteitsbeginsel te presenteren. Het "lokale velden, dus lokale ijk" argument gaat als volgt:

"We willen een *lokale* kwantumveldentheorie, maar we hebben tot nu toe alleen *globale* ijkinvariantie. Om een juiste theorie te krijgen, moeten we een *lokale* ijkinvariantie introduceren. Nadat we lokale ijkinvariantie hebben geïntroduceerd, volgt onze lokale theorie hieruit en is alles in orde."

Dit argument suggereert dat het ijkprincipe te rechtvaardigen is met het feit dat de theorie die eruit volgt ook lokaal is. Dit is echter niet het geval. Het lokaal of globaal zijn van je ijk, heeft niets te maken met het lokaal dan wel globaal zijn van je theorie.

Neem bijvoorbeeld de vrije Dirac-Lagrange dichtheid, een Lagrange dichtheid uit de lokale kwantumveldentheorie. Deze is invariant onder globale ijktransformaties:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi \Rightarrow \mathcal{L}_D \to \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D \tag{56}$$

Maar om deze Lagrange dichtheid invariant te laten zijn onder lokale ijktransformaties, moeten we eerst een covariante afgeleide invoeren. Dus het ijkprincipe kan niet fysisch gerechtvaardigd worden door het feit dat er een lokale kwantumveldentheorie uit volgt.

4.2 Het "Uit SRT volgt lokale ijk" argument

Een ander argument dat soms gebruikt wordt om het ijkprincipe te rechtvaardigen, is dat het volgt uit de speciale relativiteitstheorie (SRT):

"Een globale ijktransformatie transformeert de gekwantiseerde veldoperatoren gelijktijdig voor alle punten in de ruimte. Als de globale faseverandering van de veldoperatoren meetbaar is, zou hiermee kwantumcausaliteit zijn geschonden. Een meetbaar effect zou zich immers sneller dan de lichtsnelheid hebben voortgeplant, in tegenspraak met Einsteins SRT. Om de ijktransformaties in overeenstemming te laten zijn met de SRT zouden ze dus lokaal moeten zijn."

Los van het feit dat een globale faseverschuiving misschien niet meetbaar is, is dit geen geldig argument voor lokale ijkinvariantie van bijvoorbeeld de vrije Dirac-theorie. Ten eerste voldoen de Dirac-veldoperatoren aan de anticommutatierelaties (ref. 5):

$$\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}(\vec{x}',t)\} = \{\hat{\psi}_i^\dagger(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}',t)\} = 0, \tag{57}$$

$$\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}',t)\} = \delta_{ii'}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\hat{1} \qquad (i, i' = 1, \ldots, 4). \tag{58}$$

De $\hat{\psi}_i(\vec{x},t)$ zijn hierin de afzonderlijke componenten van een Dirac-spinor. Daarom commuteren fysische observabelen die gelijkertijd op verschillende ruimtelijke posities betrekking hebben, omdat deze observabelen in de plaatsrepresentatie uit te drukken zijn in een even aantal Dirac-veldoperatoren. Dit betekent dat we zulke observabelen gelijktijdig kunnen meten, zonder dat de metingen elkaar beïnvloeden. Kwantumcausaliteit wordt dus niet geschonden onder een (globale) fasetransformatie, want de anticommutatierelaties (57), en dus ook de commutatierelaties voor fysische observabelen, blijven gelden. Het kan worden bewezen dat dit argument voldoende is om causaliteitsschending te verwerpen voor willekeurige ruimte-tijdpunten die niet met een 'wereldlijn' te verbinden zijn.

Ten tweede, als er toch een probleem zou zijn (maar dat is er niet) met causaliteit, dan zou dit probleem niet verholpen worden door lokale in plaats van globale ijktransformaties in de theorie te stoppen. Immers, als de symmetriegroep van de Kwantumveldentheorie (bijvoorbeeld de gekwantiseerde Dirac-theorie) lokale ijktransformaties bevat, bevat hij automatisch ook nog steeds globale ijktransformaties. Een globale transformatie is slechts het speciale geval dat de lokale transformatie voor alle punten in de ruimte hetzelfde is.

Wiskundig: als we de symmetriegroep van lokale transformaties G_{lok} noemen en de symmetriegroep van globale transformaties G_{glob}, dan geldt dat de globale symmetriegroep bevat is in de lokale symmetriegroep $G_{glob} \subset G_{lok}$. Het "Uit SRT volgt lokale ijk" argument is dus ook geen geldig argument voor het ijkprincipe.

5 Historisch onderzoek

Het zoeken naar antwoorden op mijn onderzoeksvraag bracht mij naar het onderzoek van de persoon die de term ijkinvariantie introduceerde (ref. 1, 2, 3): Hermann Klaus Hugo Weyl, een Duitse Fysicus die leefde van 1885 tot 1955 (ref. 8). Hij hield zich bezig met de unificatie van de natuurwetten behorende bij elektromagnetisme en de algemene relativiteitstheorie. Dit hoofdstuk is voor een groot deel geïnspireerd op ref. 2 en 3. Sommige gedeelten van dit hoofdstuk zijn zelfs letterlijke vertalingen van passages uit deze literatuur.

5.1 IJkinvariantie: Weyl's eerste poging

Hermann Weyl introduceerde in 1918 het begrip ijkinvariantie voor het eerst toen hij probeerde de Riemann-geometrie te verbeteren. De Riemann-geometrie werkt 'op afstand', Weyl wilde er een soort 'lokale geometrie' van maken, beschreven door verschillende locaal gedefinieerde metrieken. Weyl hoopte met zijn theorie een stap dichter bij de vereniging van zwaartekracht en elektromagnetisme te komen. Zijn poging mislukte, maar hij effende wel de weg naar het principe van ijkinvariantie dat heden ten dage ten grondslag ligt aan het Standaardmodel. Weyl maakte de volgende twee aannames:

1. Er is een equivalentieklasse $[g_{\mu\nu}]$ van metrieken $g_{\mu\nu}$, in plaats van één bepaalde metriek zoals in de Algemene Relativiteitstheorie. Een metriek $g'_{\mu\nu} \equiv e^{\lambda(x)} g_{\mu\nu}$ uit de equivalentieklasse $[g_{\mu\nu}]$ moet dezelfde fysica beschrijven als $g_{\mu\nu}$. Hierin is $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ afhankelijk van x^μ.

2. Net als in Riemann-geometrie is er zoiets als een covariante afgeleide van de metriek: $g_{\mu\nu;\rho}$. Deze covariante afgeleide zorgt ervoor dat de structuur van de metriek behouden blijft. Dus:

$$g_{\mu\nu;\rho} \equiv -A_\rho g_{\mu\nu} \tag{59}$$

waarin A_ρ een evenredigheidsfactor is.

Uit deze twee aannames volgt:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu;\rho} \equiv -A'_\rho \, g'_{\mu\nu} \quad &= \partial_\rho (e^{\lambda(x)} g_{\mu\nu}) \\ &= (\ \partial_\rho \lambda(x)\ ) g'_{\mu\nu} + e^{\lambda(x)} g_{\mu\nu;\rho} \\ &= -(\ A_\rho - \partial_\rho \lambda(x)\ )\ g'_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{60}$$

De ijktransformatie van de metriek induceert een transformatie van A:

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = e^{\lambda(x)} g_{\mu\nu}, \quad A_\rho \to A'_\rho = A_\rho - \partial_\rho \lambda(x) \tag{61}$$

Deze formule heeft precies dezelfde vorm als (45), en er volgen dan ook analoog aan het verhaal in hoofdstuk 3 de elektromagnetische interacties uit.

5.2 Einstein's bezwaar

Een dappere poging, volgens sommigen, maar Weyl's theorie was niet houdbaar. Einstein kwam met het beste tegenargument: er kan maar één metriek zijn die geldt voor alle punten in de ruimte. Die metriek geeft je de kortste afstand tussen twee punten in de ruimte-tijd $\mathrm{d}s$ volgens:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{62}$$

Stel er is een equivalentieklasse van metrieken, en iedere metriek is te ijken met een factor die afhangt van de x-coördinaat. Dan is er geen connectie meer tussen ds en de meting van afstand en tijd, waardoor de relativiteitstheorie al zijn empirische basis verliest.

In een brief naar Einstein als reactie daarop schreef Weyl dat hij tot zijn ongenoegen moest toegeven dat de experimenten inderdaad het tegendeel van zijn theorie bewezen. Hij was echter nog steeds niet overtuigd en had het zo mooi gevonden dat hij uit de ijkfactor A_ρ, gecombineerd met de elektromagnetische veldsterktetensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ de wetten van Maxwell kon afleiden, dat hij bleef zoeken naar een alternatieve ijktheorie. Hij wist alleen niet hoe hij het ijkprincipe fysisch zou kunnen rechtvaardigen.

5.3 Bijdrage van London

De situatie werd later samengevat door Fritz London in een artikel dat hij in 1927 schreef:

"In het licht van het elementaire experimentele bewijs, moet het een buitengewoon sterke metaphysische overtuiging zijn geweest die Weyl ervan weerhield het idee te verwerpen dat de natuur gebruik zou maken van deze mooie geometrische mogelijkheid die hij voorstelde. Hij bleef bij zijn overtuiging en ontweek discussies over bovenstaande contradictie."

In zijn artikel stelde London een reïnterpretatie van Weyl's theorie voor: de rol van de metriek zou moeten worden overgenomen door de golffunctie, en de schaalfactor van de metriek zou moeten worden vervangen door een fasefactor van de golffunctie. Ook Erwin Schrödinger en Vladimir Fock leverden bijdragen, zoals vermeld in ref. 3. In de volgende paragraaf zullen we ons echter concentreren op Weyl's klassieke artikel uit 1929: 'Elektron und Gravitation I' (ref. 1).

Weyl accepteerde London's voorstel enthousiast. Voordat hij met een uitgewerkt en compleet verhaal kwam over de reïnterpretatie van zijn theorie uit 1918, publiceerde hij een korte samenvatting in 'Proceedings of the U.S. National Academy'. Dit bericht werd onmiddellijk bekritiseerd door Wolfgang Pauli (ref. 3):

"Voor mij ligt de april-editie van 'Proceedings of the U.S. National Academy'. Niet alleen staat een artikel van jou daarin onder de rubriek 'Physics', maar het zegt ook dat je bij een 'Fysisch Laboratorium' betrokken bent. Ik heb gehoord dat ze je in Amerika zelfs een leerstoel in 'Physics' hebben toegewezen. Ik bewonder je moed; omdat de conclusie onvermijdelijk is dat je wenst beoordeeld te worden. Niet op je successen in pure wiskunde, maar op je ware, echter ongelukkige liefde voor de fyisca."

Die opmerking kon Weyl in zijn broekzak steken voordat hij begon te schrijven aan de complete versie van zijn artikel. Pauli bekritiseerde Weyl ten dele omdat hij als ogenschijnlijk pure wiskundige de natuurkunde binnendrong. Gezien Weyl's mislukte theorie uit 1918 was het voor Pauli duidelijk dat Weyl daar niks te zoeken had. Pauli's kritiek was echter ook gericht op Weyl's nieuwe theorie, met name op zijn gebruik van tweedimensionale spinoren. Hier zal ik op terug komen nadat ik de inhoud van Weyl's tweede artikel heb samengevat.

5.4 Weyl's tweede poging

Het volledig uitgewerkte artikel (ref. 1) was ingedeeld in zes hoofdstukken. In het eerste hoofdstuk formuleert Weyl zijn tweedimensionale spinortheorie en bediscussiëert hij de invariantie van pariteit en tijdsomkering. In dit hoofdstuk en het daaropvolgende, ontwikkelt hij de eerste systematische formulering van het zogenaamde Vierbein formalisme, dat hij in de daaropvolgende hoofdstukken onder andere zal gebruiken om energie-impulsbehoud af te leiden. Tot slot, in hoofdstuk zes, komt hij tot het in zijn ogen meest fundamentele deel van zijn theorie: de afleiding van elektromagnetisme uit het ijkprincipe. In dit laatste hoofdstuk definiëerde Weyl het begrip lokale ijkinvariantie zoals wij dat nu nog kennen, afgezien van de koppelingsconstante g, die nog ontbrak:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \qquad \text{en} \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \tag{63}$$

De kwantumtheorie droeg een verzameling fysisch equivalente golffuncties met zich mee, waaruit de elektromagnetische interacties worden afgeleid op een manier die volledig analoog was aan zijn eerste theorie. Weyl geloofde vanaf toen dat het begrip ijkinvariantie niet zwaartekracht en elektromagnetisme verenigde, maar wel elektromagnetisme en materie.

Weyl's redenatie om met tweedimensionale spinoren te werken ging als volgt:

"De Dirac-theorie, waarin de golffunctie van het elektron wordt beschreven door vier componenten, geeft twee keer te veel energieniveaus. Men zou daarom moeten terugkeren naar de twee-componentige Pauli-theorie, zonder relativistische invariantie op te geven. Een gevolg daarvan is dat de elektronen massaloos worden. Maar, massa is een gravitationeel effect, dus er is de hoop dat een verbeterde theorie voor gravitatie dit probleem zal oplossen."

Een redenatie die nu volledig achterhaald blijkt; ten eerste omdat we nu weten dat de nagatieve energietoestanden van de Dirac-theorie geässocieerd moeten worden met antideeltjes. Ten tweede omdat er nog steeds veel problemen zijn met massa in de theoretische natuurkunde, en het zomaar onder de mat schuiven van de massa van het elektron tegenwoordig dus nog minder makkelijk geaccepteerd zou worden. In die tijd waren er echter niet meer dan twee fermionen bekend: het elektron en het proton, beide elektrisch geladen. Het enige bekende boson was het foton, dat elektrisch neutraal was. Weyl was er dan ook van overtuigd dat de twee componenten van de spinoren geässocieerd moesten worden met het elektron en het proton, en dat zijn theorie met tweedimensionale spinoren beter was dan een theorie met vierdimensionale Dirac-spinoren. In hoofdstuk 2 van deze scriptie heb ik afgeleid dat de Dirac-vergelijking bij een theorie met tweedimensionale spinoren voor massaloze deeltjes inderdaad een geschikte relativistische, kwantummechanische golfvergelijking is, indien we de matrices $\vec{\alpha}$ associëren met de Pauli-spinmatrices $\vec{\sigma}$.

Weyl geeft vervolgens een groepentheoretisch argument waarmee hij laat zien dat in zijn theorie pariteit niet altijd behouden is, en ziet dit als een nadeel van zijn theorie, omdat in die tijd pariteitsschending nog lang niet ontdekt was. Omdat hij dacht dat het massaprobleem opgelost zou worden door een alternatieve theorie voor gravitatie, concludeerde hij dat een Dirac-theorie met een vierdimensionale ψ eerder nodig was om dit pariteitsprobleem op te lossen dan vanwege het massaprobleem. Nu weten we echter dat de zwakke interacties pariteit niet behouden, dus is het feit dat Weyl's theorie pariteitsschending toestaat niet langer een probleem.

Een ander belangrijk element in Weyl's theorie is het Vierbein-formalisme. Een Vierbein is een orthonormale basis van vier vectorvelden: één voor de tijd, en drie voor de ruimte. Ieder punt in de ruimte heeft zijn eigen Vierbein, waarin de fysica geldt volgens de metriek in de algemene relativiteitstheorie, en volgens de golffunctie in de kwantummechanica. Er is echter een verschil tussen de Vierbeinen van de algemene relativiteitstheorie en die van de kwantummechanica:

- Omdat er één metriek is voor alle punten in de ruimte, zijn de Vierbeinen in de algemene relativiteitstheorie "starre" objecten, die niet onafhankelijk van elkaar in ieder punt van de ruimte gedraaid kunnen worden. Zodoende kan er aan de metriek geen schalingsfactor $e^{\lambda(x)}$ (waarin $\lambda(x)$ afhankelijk is van x^μ) worden toegevoegd.

- Omdat er niet zoiets bestaat als één enkele 'golffunctie-metriek', verliezen de Vierbeinen hun "starheid" in de kwantumtheorie. Ze kunnen daardoor in de kwantumtheorie wel onafhankelijk van elkaar in ieder punt van de ruimte gedraaid worden. Zodoende kan er aan de golffunctie een complexe fasefactor $e^{i\alpha(x)}$ (waarin $\alpha(x)$ afhankelijk is van x^μ) worden toegevoegd. Dit noemde Weyl het ijkprincipe.

Nadat Weyl al het voorbereidend werk had verricht in de eerste hoofdstukken, kon hij gaan oogsten in het laatste hoofdstuk en leidde hij elektromagnetisme uit het ijkprincipe af.

6 Nieuwe blik op Weyl's theorie

In dit laatste hoofdstuk zal ik mijn historisch onderzoek combineren met de moderne kwantumtheorie uit hoofdstuk 2 om tot fysiche argumenten te komen voor het ijkprincipe. Hierbij zal ik eerst Pauli's reactie op de volledig uitgewerkte versie van Weyl's theorie van ijkinvariantie bespreken en vervolgens zelf een moderne blik werpen op Weyl's theorie.

6.1 Reactie van Pauli

Pauli's houding ten opzichte van Weyl werd duidelijk milder nadat de uitgebreide versie van diens artikel verschenen was, zoals blijkt uit onderstaand citaat (vrij vertaald uit ref. 3):

"In tegenstelling tot de gemene dingen die ik eerder zei, is het essentiële deel van mijn laatste brief nu achterhaald, met name door je artikel in 'Zeitschrift für Physik'. Daardoor heb ik zelfs spijt gekregen dat ik naar je geschreven heb. Na het bestuderen van je artikel geloof ik dat ik werkelijk begrepen heb wat je wilde doen (dit was niet het geval bij mijn eerste reactie) ... Ik moet toegeven dat je fysisch talent hebt. Je eerdere theorie met $g'_{\mu\nu} = e^{\lambda(x)} g_{\mu\nu}$ was puur mathematisch en onfysisch. Einstein had het volledig bij het rechte eind met zijn kritiek. Nu is het uur van jouw revanche aangebroken ... Waar ik het echter niet mee eens ben is je interpretatie van de onopgeloste problemen met de Dirac-theorie (de negatieve energietoestanden) en ik zet dan ook mijn vraagtekens bij het gebruik van de tweedimensionale spinortheorie. Ik ben van mening dat het massaprobleem niet opgelost zal worden door gravitatie ... de gravitationele invloed zal altijd veel te klein zijn."

Met zijn kanttekening op het einde maakte Pauli een goed punt, want de problemen met de Dirac-theorie bleken inderdaad op een andere manier opgelost te worden: de negatieve energietoestanden moeten geässocieerd worden met antideeltjes. Ook is het massaprobleem nog steeds niet opgelost (door gravitatie).

6.2 Het ijkprincipe voor Weyl-spinoren

Zoals Weyl in zijn artikel beargumenteerde, kan er aan tweedimensionale spinoren voor massaloze deeltjes (Weyl-spinoren) een fasefactor $e^{i\alpha(x)}$ worden toegevoegd (het ijkprincipe). In deze paragraaf zal ik met moderne fysica beargumenteren dat het ijkprincipe voor Weyl-spinoren gerechtvaardigd is.

Beschouw de vrije Dirac-theorie in een isotrope, lege ruimte. Het relativiteitsprincipe moet gelden, met andere woorden, de bewegingsvergelijking moet vorminvariant zijn onder Lorentz-transformaties. Daaruit volgt dat de Hamilton-operator van de vrije Dirac-theorie invariant moet zijn onder globale rotaties en ruimtelijke translaties (omdat die niks met de tijd doen). Hieruit volgt dat $[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = [\hat{H}, \hat{\vec{p}}] = 0$.

Dan commuteert $\hat{H}$ dus ook met de heliciteitsoperator $\hat{h}$, omdat we daarbij precies de $(\hat{\vec{J}}\cdot\hat{\vec{p}})$-component van $\hat{\vec{J}}$ nemen: $[\hat{H},\hat{h}] \propto [\hat{H},\hat{\vec{J}}\cdot\hat{\vec{p}}] = [\hat{H},\hat{\vec{J}}]\cdot\hat{\vec{p}} + \hat{\vec{J}}\cdot[\hat{H},\hat{\vec{p}}] = 0$.

Verder geldt: $[\hat{\vec{p}}\ ,\ \hat{\vec{J}}\cdot\hat{\vec{p}}] = [\hat{\vec{p}}\ ,\ (\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}})\cdot\hat{\vec{p}}] = 0$. De twee componten van $\hat{\vec{J}}\cdot\hat{\vec{p}}$ commuteren namelijk allebei met $\hat{\vec{p}}$: $[\hat{\vec{p}}\ ,\ \hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{p}}] = 0$ omdat $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}$, en $[\hat{\vec{p}}\ ,\ \hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{p}}] = 0$ omdat de $\hat{\vec{S}}$-operator en de $\hat{\vec{p}}$-operator op verschillende ruimten werken. Dus $\hat{H},\hat{\vec{p}}$ en $\hat{h}$ zijn onderling commensurabel voor de vrije Dirac-theorie, zodat de energie (E), de impuls ($\vec{p}$) en de heliciteit (h) gelijktijdig meetbaar zijn.

Wat gebeurt er nu als we deeltjes toevoegen? 1-deeltjes toestanden kunnen worden gemaakt met behulp van de goede kwantumgetallen E, $\vec{p}$ en h. Zodra we echter een deeltje met impuls $\vec{p}$ hebben toegevoegd aan het vacuüm, is daarmee een voorkeursrichting gedefinieert. Rond deze richting is de ruimte echter nog steeds isotroop, dus we kunnen na het toevoegen van een deeltje wel nog vrij roteren rond de propagatierichting.

Deze interpretatie leidt mij tot de volgende gegeneraliseerde uitspraak die sterker is dan bovenstaande globale rotatie-invariantie: de rotatie-invariantie rond de propagatierichting zou moeten gelden in elk tijd-ruimte punt afzonderlijk. Deze uitspraak zou je kunnen opvatten als een postulaat, een eis die je aan de theorie oplegt aan de hand van symmetrie-argumenten.

Voor een willekeurige andere Lorentz-transformatie is de ruimte niet meer isotroop:

- Bij een boost is er sprake van de verandering van de impuls: hiermee introduceren we dus een kracht.
- Ook bij een rotatie rond een andere as dan die van de propagatierichting is er sprake van impulsverandering.

Per definitie komt een rotatie rond de propagatierichting overeen met een unitaire transformatie in de spinruimte met bijbehorende unitaire operator: $\hat{U} = \exp[-i\alpha\ \hat{\vec{S}}\cdot\vec{e}_p]$. De generator van infinitesimale rotaties van een 1-deeltjessysteem in de spinruimte is namelijk de spinoperator. Door de rotatie in elk tijd-ruimte punt afzonderlijk uit te voeren is er nu dus sprake van een rotatiehoek $\alpha(x)$ die afhankelijk is van x^μ.

Nu wil het toeval dat voor Weyl-spinoren, die massaloze spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes beschrijven, de eigenwaarde van de heliciteitsoperator precies gelijk is aan de chiraliteit vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}$, zoals in hoofdstuk 2 is afgeleid. Als de deeltjes respectievelijk linkshandige of rechtshandige chiraliteit hebben dan geldt dus dat

$$\psi_L \to \psi'_L = e^{i\alpha(x)/2}\ \psi_L \qquad \text{en} \qquad \psi_R \to \psi'_R = e^{-i\alpha(x)/2}\ \psi_R \tag{64}$$

geldige ijktransformaties zijn. En voor de antideeltjes zijn dat

$$\bar{\psi_L} \to \bar{\psi'_L} = e^{-i\alpha(x)/2}\ \bar{\psi_L} \qquad \text{en} \qquad \bar{\psi_R} \to \bar{\psi'_R} = e^{i\alpha(x)/2}\ \bar{\psi_R} \tag{65}$$

Voor de tweedimensionale Weyl-spinoren geldt dus dat er één transformatiekarakteristiek is voor beide componenten wanneer de spinor ofwel een linkshandig deeltje en een rechtshandig antideeltje beschrijft, of een rechtshandig deeltje en een linkshandig antideeltje! Voor deeltjes met massa $m \neq 0$ worden de ψ_L- en ψ_R-termen met elkaar gekoppeld in de relativistische kwantummechanische golfvergelijking. De verschillende componenten van de spinoren behorende bij massieve deeltjes hebben allemaal een andere transformatiekarakteristiek, dus een lokale ijktransformatie is dan niet mogelijk.

Bovenstaand argument geldt in een ruimte met 1 deeltje. Het kan worden uitgebreid tot een analoog argument voor een veeldeeltjessysteem, mits deze deeltjes niet interageren, en dus in beginsel onafhankelijk van elkaar waarneembaar zijn.

7 Samenvatting en conclusie

In deze scriptie heb ik fysische argumenten kunnen geven voor een ijktheorie behorende bij massaloze deeltjes. Weyl gaf al enkele argumenten in zijn theorie uit 1929, maar hij laat de propagatierichting van de deeltjes die beschreven worden door zijn tweedimensionale spinoren buiten beschouwing. Bovendien dacht hij dat zijn spinoren eigenlijk massieve deeltjes beschreven en zag hij het feit dat de deeltjes massaloos waren als iets dat nog opgelost zou moeten worden door een alternatieve theorie voor gravitatie. Tegenwoordig kunnen we het ijkprincipe zien als iets dat rechtstreeks af te leiden is uit het volgende postulaat:

"In elk tijd-ruimte punt afzonderlijk geldt dat de Hamilton-operator van de vrije Dirac-theorie behorende bij massaloze spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes invariant is onder rotaties rond de propagatierichting van die deeltjes."

Dit postulaat komt echter niet geheel uit te lucht vallen, maar is te aanvaarden vanwege symmetrie-argumenten.

Fysische argumenten voor de ijktheorie behorende bij deeltjes met massa liggen buiten de context van deze scriptie, aangezien de ijktheorie behorende bij het standaardmodel feitelijk alleen massaloze deeltjes kan beschrijven. Voor een theorie met massieve deeltjes is er een additionele truc nodig, bijvoorbeeld in de vorm van het Higgs-mechanisme van spontane symmetriebreking.

8 Bronvermelding

1. Hermann Weyl, *Elektron und Gravitation I*, Zeitschrift für Physik 56, pag. 330-352, 1929

2. Norbert Straumann, *Gauge Principle and QED*
   Invited talk at PHOTON 2005, *The Photon: Its First Hundred Years and the Future*, Warsaw, 31.08 - 04.09, 2005, and references therein.

3. Lochlainn O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press, 1997, and references therein.

4. Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995

5. Wim Beenakker, *Dictaat bij het college Kwantummechanica 3*, Jaargang 2007-2008

6. Wim Beenakker, *Lecture notes for the course New Windows on the Universe, Part 1*, Jaargang 2007-2008

7. Christiaan Dirk Zwart, *IJksymmetrie in Quantumveldentheorie*, Docteraalscriptie Universiteit Utrecht, 2006

8. Wikipedia, the free encyclopedia, *Hermann Weyl*, last modified on 10 September 2008, at 15:54.