

# Internationaal wiskundetoernooi 2018 - Sum of Us

Beste deelnemers,

Dit boekje bevat de opgaven voor het tweede deel van het Internationaal wiskundetoernooi 2018: de Sum of Us-ronde. Alvorens te beginnen, raden we jullie aan om de instructies op de volgende pagina door te lezen.

Deze opgaven van Sum of Us zijn gemaakt door Carlijn Mulders (studente wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen) onder begeleiding van Wadim Zudilin.

Veel plezier en succes!

## Instructies

- Er zijn 4 opdrachten. Bij elke opdracht staat bovenaan aangegeven hoeveel punten ermee te verdienen zijn. In totaal zijn er 500 punten te behalen.
- Als je met één van de opdrachten klaar bent, lever je het bijbehorende ingevulde antwoordformulier in bij de jurytafel. Vergeet niet je tafelnummer in te vullen. De antwoordformulieren voor de opdrachten mogen in willekeurige volgorde afgegeven worden.
- Toegestane hulpmiddelen zijn de bundel met voorbereidend materiaal, de oplossingen van de opgaven in de bundel en een niet-grafisch rekenoestel.

# 1 Verf maken (110 punten)

Verffabriek 't Kloddertje produceert een kleurloze basisverf en twee soorten pigment: ultramarijn en curcumine. Het maken van 100 liter basisverf kost 1 uur productietijd in de fabriek en daarna een half uur in de pers. De productie van 1 kilogram ultramarijn kost 2 uur in de fabriek en de productie van 1 kilogram curcumine kost 1,5 uur in de fabriek. Elke maand mag de fabriek maximaal 600 uur draaien en de pers maximaal 90 uur.

Deze ingrediënten worden vervolgens samengevoegd tot twee soorten verf: blauw en geel. Voor 1 liter blauwe verf is 1 liter basisverf en 20 gram ultramarijn nodig. Voor 1 liter gele verf is 1 liter basisverf en 10 gram curcumine nodig. 1 Liter blauwe verf levert 4,50 euro op en 1 liter gele verf levert 3 euro op. Per maand mag er maximaal 10.000 liter blauwe en 13.000 liter gele verf geproduceerd worden.

1. 't Kloddertje wil zoveel mogelijk winst maken. Geef de doelfunctie die hierbij hoort.
2. Formuleer de randvoorwaarden waar 't Kloddertje rekening mee moet houden.
3. Hoeveel liter blauwe verf en hoeveel liter gele verf moet de verffabriek per maand maken om zoveel mogelijk winst te behalen? Ondersteun je antwoord met een grafiek en leg daarbij uit welke belangrijke informatie je uit de grafiek kan aflezen. Bereken je uiteindelijke antwoord.
4. Wat is de maximale winst die 't Kloddertje kan behalen?

De eigenaren van 't Kloddertje besluiten hun winst goed te besteden. Ze gaan nog een derde soort pigment produceren: zeegroen. Het maken van 1 kilogram zeegroen kost 3 uur in de fabriek. Als 25 gram pigment wordt gemengd met 1 liter basisverf, ontstaat er 1 liter groene verf. 1 Liter groene verf levert 5,50 euro op. Per maand willen ze niet meer dan 80000 liter groene verf produceren.

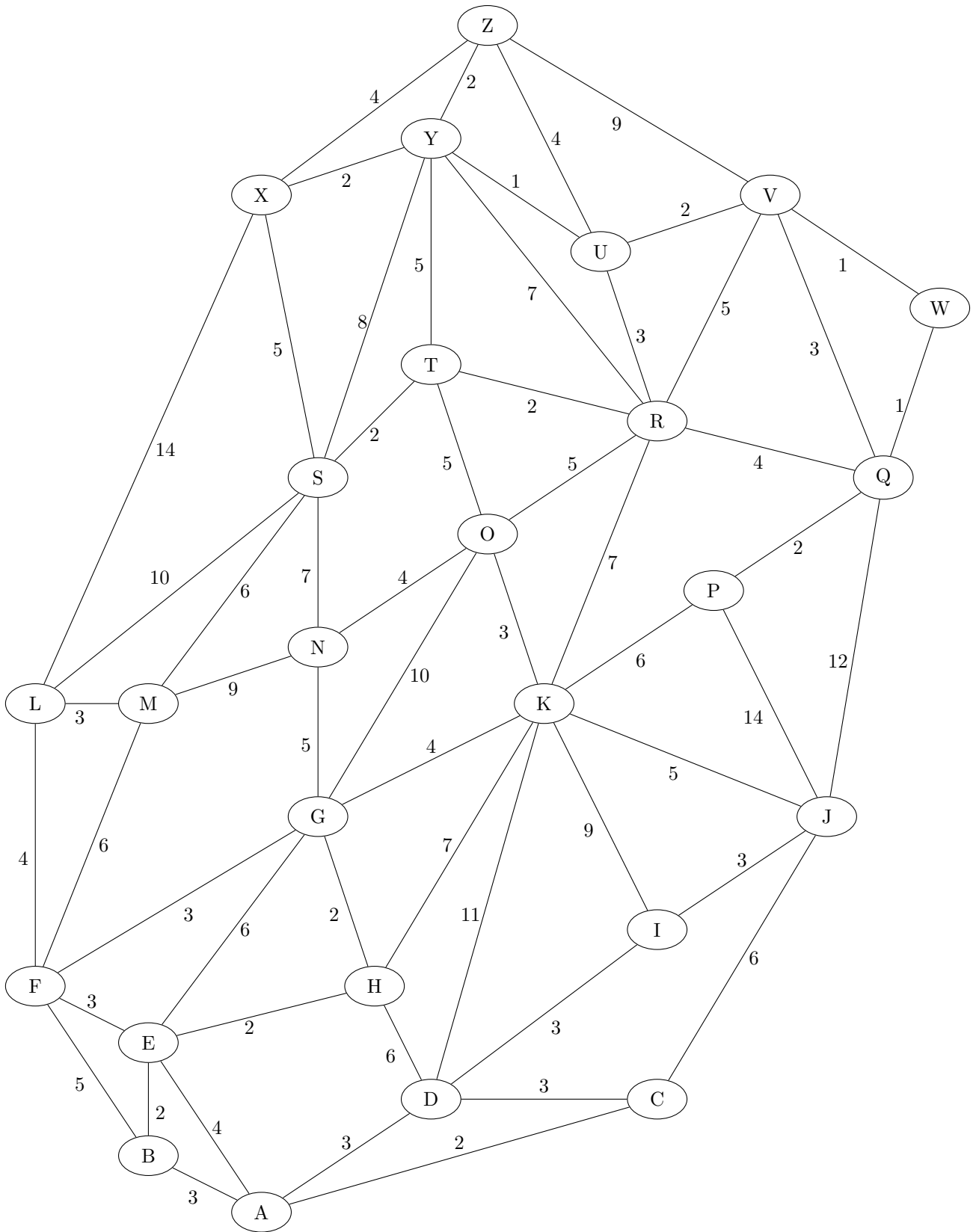
5. 't Kloddertje wil nog steeds zoveel mogelijk winst maken. Wat wordt nu de bijbehorende doelfunctie?
6. Formuleer de nieuwe randvoorwaarden waar 't Kloddertje rekening mee moet houden.

## 2 Op bezoek (150 punten)

Sjoerd besluit naar zijn vriend Herman te fietsen. Het huis van Sjoerd is in onderstaande graaf aangegeven met een 'A' en het huis van Herman met een 'Z'. De tussenliggende knopen zijn kruispunten en de lijnen geven de wegen aan. De getallen bij de lijnen staan voor de afstand van die weg (in kilometers).

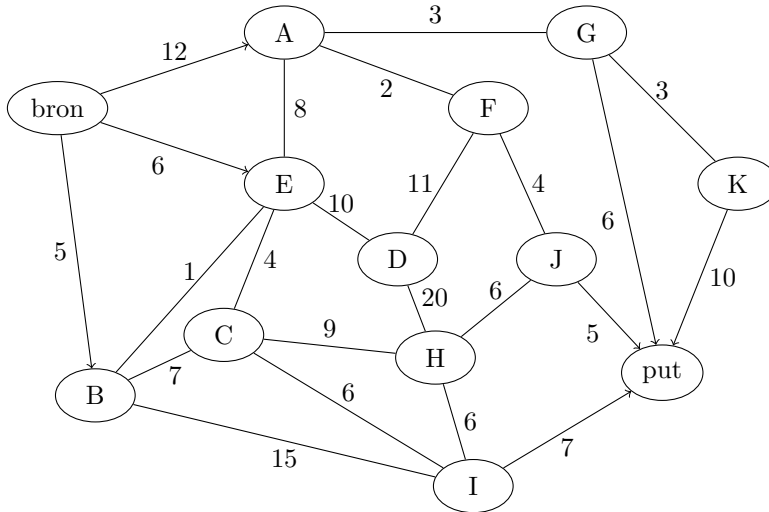
Aangezien Sjoerd niet van fysieke inspanning houdt, wil hij het liefst zo min mogelijk kilometers afleggen om bij Herman te komen.

1. Wat is het kortste pad van Sjoerd (A) naar Herman (Z)? Geef je antwoord als een rijtje van letters (bijv. ABFLXZ).
2. Wat is de afstand van deze kortste route?



### 3 Rioolproblemen (70 punten)

De gemeente Nijmegen heeft het idee dat de rioolafvoer van de Universiteit niet optimaal verloopt. Daarom hebben ze besloten nogmaals naar de schematische weergave van de rioolbuizen te kijken. Deze ziet er als volgt uit:

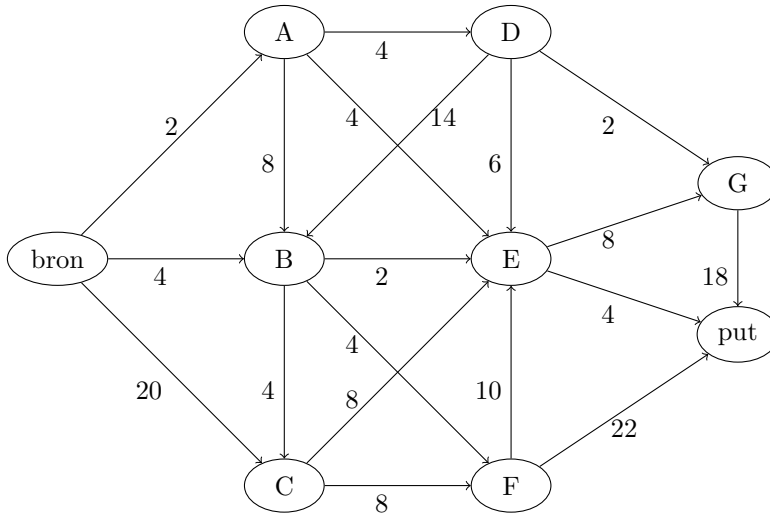


In dit netwerk staan de capaciteiten van de rioolbuizen aangegeven. Bovendien blijkt dat bijna overal het rioolafvoer beide kanten op kan stromen (het is grotendeels een ongerichte graaf).

1. Teken op het antwoordformulier een maximale stroom in de graaf. Kijk per buis welke kant de stroom het beste op kan gaan. Geef dit ook aan in de graaf met behulp van pijltjes. Geef tevens de grootte van een maximale stroom.
2. Wat is een minimale snede? Geef antwoord door een minimale snede te tekenen in de graaf op het antwoordformulier. Geef tevens de grootte van de snede.

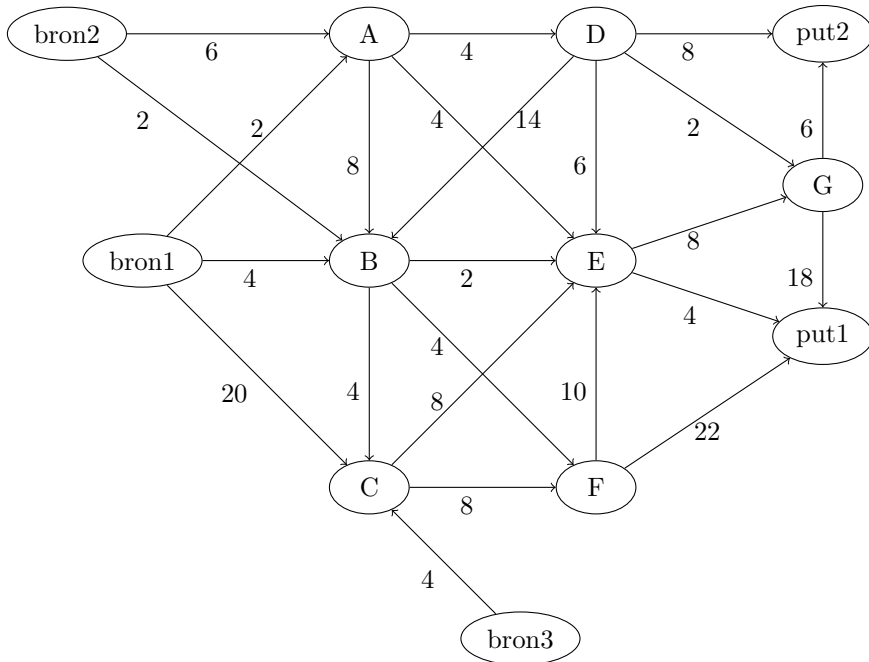
## 4 Waterbedrijf (170 punten)

Het waterbedrijf *Aqua Amor* zorgt ervoor dat er bij iedereen in Nederland schoon drinkwater uit de kraan komt. Onderstaand netwerk geeft schematisch weer hoe het water van een bron naar een zuiveringsinstallatie (in de graaf aangegeven als de put) kan gaan. De getallen langs de lijnen geven de capaciteit weer: de maximale hoeveelheid water die per minuut door de betreffende buis kan lopen.



1. In dit netwerk zijn alle capaciteiten even getallen. Er is een stelling die beweert dat als alle capaciteiten even zijn, dat dan ook de maximale stroom even is. Beredeneer dat dit klopt. Je mag hiervoor gebruik maken van alle stellingen die gegeven zijn in het voorbereidend materiaal.
2. Geef op het antwoordformulier een maximale stroom aan in de graaf en geef de totale grootte van deze stroom.
3. Wat is een minimale snede? Geef antwoord door de snede te tekenen in de graaf op het antwoordformulier. Geef tevens de grootte van de snede.

In werkelijkheid maakt *Aqua Amor* gebruik van meerdere bronnen en meerdere zuiveringsinstallaties. Dit zorgt voor ingewikkeldere grafen. In onderstaande graaf hebben we twee extra bronnen (bron2 en bron3) en één extra zuiveringsinstallatie (put2) toegevoegd.



4. Om een maximale stroom en minimale snede van een graaf te bepalen, is het handig als de graaf een netwerk is. Waarom is bovenstaande graaf geen netwerk?
5. Op het antwoordformulier is een kopie van bovenstaande graaf toegevoegd. Breid de graaf zodanig uit dat aan de volgende eisen voldaan wordt:
  - De graaf is een netwerk
  - De aangepaste graaf laat elke maximale stroom van de originele graaf intact
  - Elke lijn (dus ook een zelf toegevoegde lijn) heeft een capaciteit
6. Wat is van deze nieuwe, aangepaste graaf een maximale stroom? Teken de stroom in de graaf op het antwoordformulier. Let op! Vergeet de aanpassingen van de vorige vraag niet! Geef ook de grootte van de stroom.
7. Wat is van deze nieuwe, aangepaste graaf een minimale snede? Geef antwoord door de snede te tekenen in de door jullie aangepaste graaf op het antwoordformulier. Geef ook de grootte van de snede.