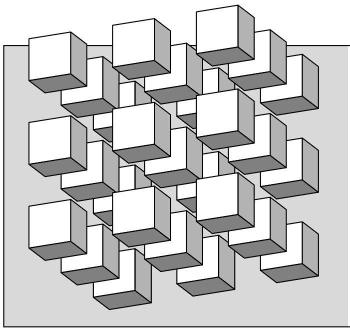


27^{e} Wiskundetoernooi

Radboud Universiteit

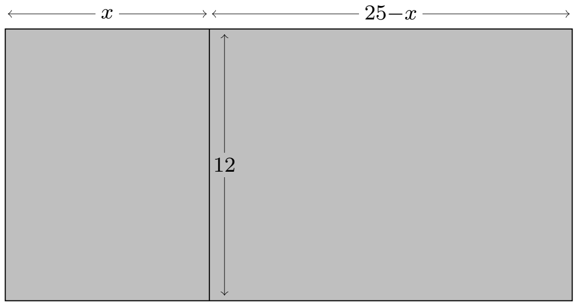
universitätbonn

KU LEUVEN

Estafette 2018

Uitwerking opgave 1

De langste zijde wordt in twee ongelijke stukken verdeeld. Laat x de lengte van het ene stuk zijn, dan is het andere stuk $25 - x$.



Dat de twee rechthoeken gelijkvormig zijn wil zeggen dat de verhoudingen tussen hun zijden gelijk zijn: $12 : x = (25 - x) : 12$. Als we dit uitvermenigvuldigen krijgen we de vergelijking

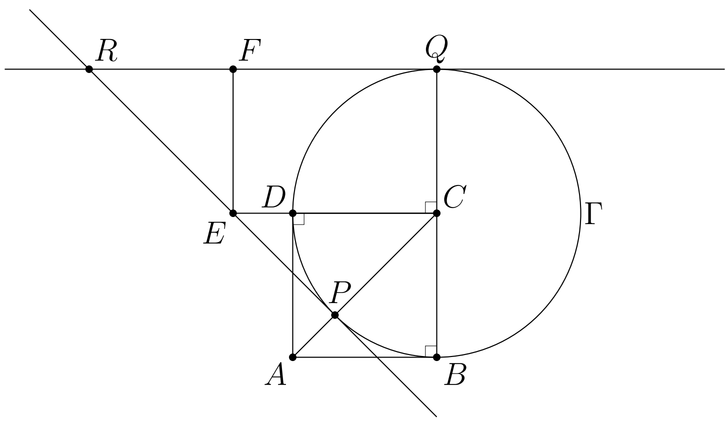
$$144 = 25x - x^2.$$

Een oplossing hiervan is $x = 9$, want $25 \cdot 9 - 9^2 = 16 \cdot 9 = 144$. De andere oplossingen is de gespiegelde hiervan (in de bovenstaande tekening): $x = 25 - 9 = 16$.

In beide gevallen (9 en 16) hebben de twee rechthoeken hebben afmetingen 16 bij 12 en 9 bij 12. De oppervlakte van de kleinste van die twee is $9 \cdot 12 = 108$.

Uitwerking opgave 2

Eerst tekenen we wat handige extra punten en lijnen. Verleng het lijnstuk CD, en laat E het snijpunt met PQ zijn. Kies F op RQ, zodat EF parallel met CQ is.



Uit de gegevens weten we dat $\angle EPC = 90°$ en $\angle PCE = 45°$. Met de hoekensom in PCE vinden we dat $\angle PEC = 45°$. Dus EPC is symmetrisch voor spiegeling in de verticale lijn door P, en $|EP| = |CP|$. Aangezien P op Γ ligt, hebben we $|CP| = 1$.

Omdat EF parallel met CQ is, geldt $\angle CEF = \angle ECQ = 90°$. Op PR bekijken we de gestrekte hoek bij E:

$$180° = \angle REF + \angle FEC + \angle CEP = \angle REF + 90° + 45°.$$

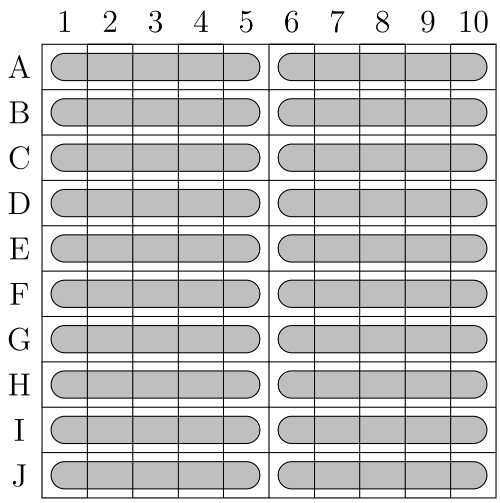
Hieruit volgt $\angle REF = 45°$. Aangezien RQ de raaklijn aan Γ bij Q is, $\angle CQR = 90°$. Er volgt dat ook $\angle RFE = \angle EFQ = 90°$. Nu weten we dat RQ en EC parallel zijn, dus $\angle QRP = \angle CEP = 45°$.

Dus EFR heeft hoeken $45°, 45°, 90°$, en heeft een rechte zijde van lengte 1. Dan heeft de andere zijde RF ook lengte 1, en volgens Pythagoras heeft de schuine zijde ER lengte $\sqrt{2}$.

In totaal krijgen we daarmee $|PR| = |PE| + |ER| = 1 + \sqrt{2}$.

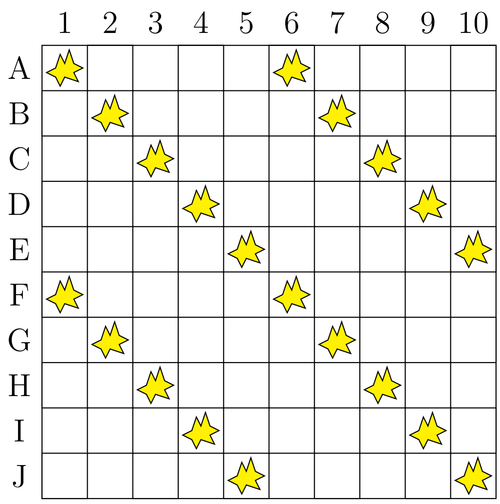
Uitwerking opgave **3**

Op het bord kunnen 20 vliegdekschepen worden geplaatst, bijvoorbeeld zo.



Jack zal met zijn schoten elk van deze 20 vliegdekschepen moeten raken. Dus er zijn minstens 20 schoten nodig.

Een manier om te volstaan met 20 schoten is hieronder aangegeven.



Dan zijn er namelijk in geen enkele rij en geen enkele kolom 5 aaneengesloten vrije vakjes, dus het schip wordt zeker geraakt.

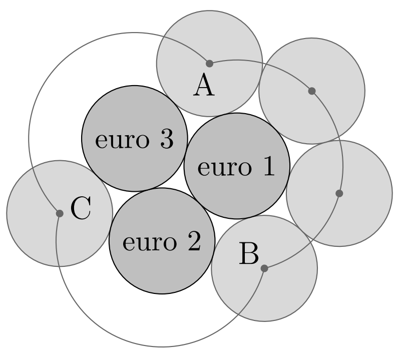
Uitwerking opgave **4**

Als Phoebe in het midden zou zitten, dan zou zij onjuist hebben geantwoord, dus dat kan niet. Als Rachel in het midden zou zitten, dan zouden beide andere zussen een incorrect antwoord hebben gegeven. Maar Phoebe spreekt altijd de waarheid, dus die mogelijkheid valt ook af.

Dan moet Monica wel in het midden zitten. De linkse zus liegt nu, dus dat is niet Phoebe. Dus de linkse zus is Rachel, en Phoebe zit rechts.

Uitwerking opgave **5**

De vierde euro raakt precies drie keer per omwenteling twee andere euros. Laten we de posities van het middelpunt van de vierde euro bij die drie gebuetenissen A, B en C noemen.



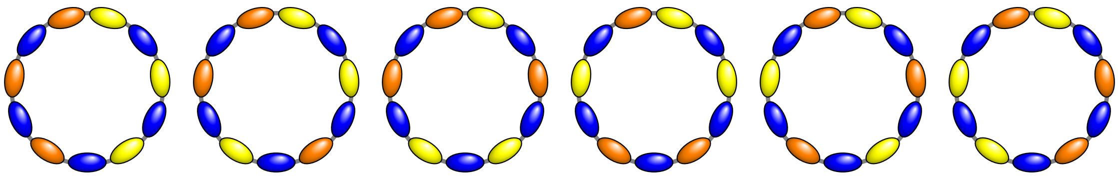
Uit de symmetrie is duidelijk dat het pad van A naar B even lang als het pad van B naar C is, en ook even lang als het pad van C naar A.

We gaan het pad van A naar B beter bekijken. Rondom euro 1 passen precies zes euro's die elkaar niet overlappen. Daaruit zien we dat de posities A en B precies tegenover elkaar liggen ten opzichte van het middelpunt van euro 1. Als euro 4 van A naar B rolt, doorloopt zijn middelpunt precies een halve cirkel, met als straal r twee keer de straal van een euro. Die halve cirkel heeft als lengte $2\pi r/2 = 2\pi$.

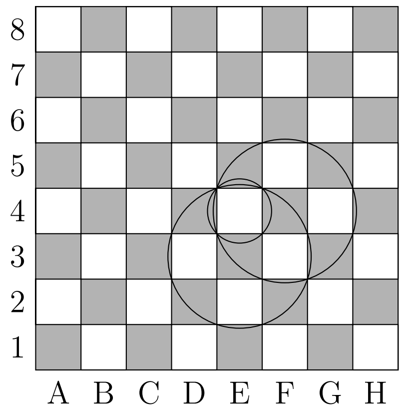
Van B naar C doorloopt het middelpunt van euro 4 ook een halve cirkel met lengte 2π, en van C naar A ook. In één omwenteling wordt dat in totaal $3 \cdot 2\pi = 6\pi$.

Uitwerking opgave **6**

Tussen elk tweetal opeenvolgende blauwe kralen zit precies een kraal, op een plek na. Op die plek zitten twee kralen, die verschillend moeten zijn. Er zijn 6 mogelijkheden.



Uitwerking opgave **7**



Label de vakjes van het schaakbord op de standaard manier (1-8 van beneden naar boven, A-H van links naar rechts).

Stel we proberen een cirkel te tekenen die van D4 naar E5 gaat, en die met de klok mee draait. In ieder geval gaat zo'n cirkel door het snijpunt van D4 en E5. We kunnen de cirkel dan voortzetten naar F6 of F4, via het snijpunt van F6 of F4 met E5.

Als we voortzetten naar F6, moeten we vervolgens naar G5 (als we naar G7 gaan wordt de cirkel een rechte lijn omdat hij drie punten op de diagonaal van A1 naar H8 bevat). We hebben nu 3 punten van onze cirkel vastgelegd (allemaal snijpunten van zwarte vakjes), dus dit legt de hele cirkel vast. Deze cirkel heeft als middelpunt het midden van F4, en diameter $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Als we vanuit E5 voortzetten naar F4, kunnen we vervolgens voortzetten richting E3 of G3. Richting G3 geeft dezelfde cirkel als hierboven (weliswaar met middelpunt E3). Richting E3 voortzetten geeft een cirkel rond het witte vakje E4, met diameter $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Als we een cirkel beginnen op twee andere zwarte vakjes schuin naast elkaar, dan volgt op dezelfde manier dat de straal $\sqrt{10}$ of $\sqrt{2}$ is. De grootst mogelijke cirkel heeft dus diameter $\sqrt{10}$.

Uitwerking opgave 8

Neem als jaartal $abcd$. We merken op dat d niet 0 kan zijn, want dan zou je moeten delen door 0 om de kettingbreuk uit te rekenen.

We schrijven de kettingbreuk om tot een normale breuk:

$$a \quad + \quad \frac{1}{b + \dfrac{1}{c + \dfrac{1}{d}}} \quad = \quad a \quad + \quad \frac{1}{b + \dfrac{d}{cd+1}} \quad = \quad a \quad + \quad \frac{cd+1}{bcd+b+d}. \tag{1}$$

Dit moet gelijk worden aan $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$. Aangezien (1) groter dan a is, kan a hoogstens 3 zijn. Het is gegeven dat $a \neq 0$.

Stel dat $a = 1$. Dan

$$\frac{cd+1}{bcd+b+d} = 3\frac{1}{8} - 1 = 2\frac{1}{8}.$$

Dat kan alleen als $b = 0$, anders is de noemer groter dan de teller. Nu zoeken we c, d zodat

$$2\frac{1}{8} = \frac{cd+1}{d} = c + \frac{1}{d}.$$

Hier is c geheel en $\frac{1}{d} \leq 1$, dus de enige mogelijkheid is $c = 2, d = 8$.

Stel vervolgens dat $a = 2$. Dan

$$\frac{cd+1}{bcd+b+d} = 3\frac{1}{8} - 2 = \frac{9}{8}.$$

Wederom kan dit alleen als $b = 0$, en we zoeken c, d zodat

$$1\frac{1}{8} = \frac{cd+1}{d} = c + \frac{1}{d}.$$

De enige oplossing is $c = 1, d = 8$.

Stel nu dat $a = 3$. Dan

$$3\frac{1}{8} - 3 = \frac{1}{8} = \frac{cd+1}{bcd+b+d} = \frac{1}{b + \dfrac{d}{cd+1}}.$$

Dit is equivalent met

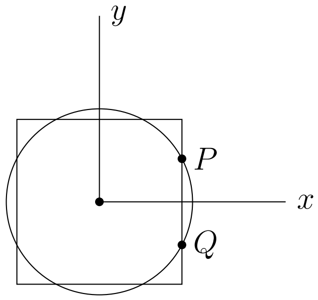
$$8 = b + \frac{d}{cd+1}.$$

Per aanname $d \neq 0$. Als $c > 0$, dan is de rechterkant geen geheel getal, dus c moet wel 0 zijn. Dan wordt de vergelijking $8 = b + d$, en daarvoor zijn acht oplossingen met $d > 0$.

In totaal vinden we voor $abcd$ de mogelijkheden 1028, 2018, 3008, 3107, 3206, 3305, 3404, 3503, 3602, 3701. De som van de cijfers is in alle gevallen 11.

Uitwerking opgave **9**

De oppervlakte van de cirkel is π, dus de zijde van het vierkant is $\sqrt{\pi}$. Kies een coördinatensysteem zodat het middelpunt de cirkel de oorsprong is, zodat PQ parallel met de y-as is en de bovenzijde van het vierkant parallel met de x-as.



Dan hebben P en Q x-coordinaat $\sqrt{\pi}/2$. Schrijf $P = (\sqrt{\pi}/2, y)$ met $y > 0$. Omdat P op de eenheidscirkel ligt, geldt

$$1 = (\sqrt{\pi}/2)^2 + y^2 = \pi/4 + y^2.$$

Dus $y = \sqrt{1 - \pi/4}$. Op dezelfde manier vinden we dat $Q = (\sqrt{\pi}/2, -\sqrt{1 - \pi/4})$. De afstand van P tot Q wordt daarmee $2\sqrt{1 - \pi/4} = \sqrt{4 - \pi}$.

Uitwerking opgave **10**

Geef de windsnelheid (in km/u) aan met w. Met de wind mee gaat het vliegtuig $500 + w$ km/u, en met wind tegen $500 - w$ km/u. Zij d de afstand van A tot B (in km).

Op het gegeven punt is benodigde tijd om naar B te vliegen $\dfrac{0.58 \cdot d}{500 + w}$ uur. Om naar A te vliegen kost dan $\dfrac{0.42 \cdot d}{500 - w}$ uur. De opgavestelling zegt dat deze twee tijdsduren gelijk zijn. Daaruit volgt dat

$$\frac{500 - w}{500 + w} = \frac{0.42 \cdot d}{0.58 \cdot d} = \frac{0.42}{0.58} = \frac{420}{580}.$$

Deze vergelijking heeft als oplossing $w = 80$.

Uitwerking opgave **11**

Voor $n = 13$ kan het niet, want

$$1 + 2 + \cdots + 13 = 13 \cdot 14/2 = 91 < 99.$$

Ook voor $n \leq 13$ is $1 + 2 + \cdots + n$ kleiner dan 99, dus dan lukt het niet, voor geen enkele k.

Voor $n = 14$ lukt het wel, met $k = 3$:

$$4 + 5 + \cdots + 14 = 1 + 2 + \cdots + 14 - (1 + 2 + 3) = (14 \cdot 15/2) - 6 = 99$$

Uitwerking opgave **12**

Als E naar rechts gaat, dan gaan A en D ook naar rechts (4). Dan gaat B naar rechts (3), en C naar links (1). Dit is in tegenspraak met (2).

Dus E gaat naar links. Dan gaat D naar rechts (5), en C ook (2). Volgens (1) gaat B naar links, en dan zegt (3) dat A niet naar rechts gaat.

Uitwerking opgave **13**

We bekijken alle bedragen in centen. Een van de bedragen is deeldoor 1009, de andere drie zijn samen hoogstens 1009. Het product van de overige drie bedragen is 20000. De overige drie bedragen hebben dus alleen 2 en 5 als priemdelers. We onderscheiden twee gevallen:

- *Geval 1: twee van de drie bedragen zijn deelbaar door* 5.
  Omdat de som van de drie bedragen op een 9 eindigt, eindigen de drie bedragen met 0, 4 en 5. Het bedrag dat op een 4 eindigt, is een macht van 2, die kleiner is dan 64, want $64 = 2^6$ is geen deler van 20000. Het bedrag is dus 4, en dat is ook het kleinste bedrag. De overige twee bedragen zijn 5 en 1000.
- *Geval 2: slechts een van de drie bedragen is deelbaar door* 5.
  Omdat 20000 viermaal deelbaar is door 5, is het bedrag dat deelbaar is door 5 ook viermaal deelbaar door 5. Dit kan alleen als dit bedrag $5^4 = 625$ is. Het product van de overige bedragen is een macht van 2, die kleiner is dan 64, want $64 = 2^6$ is geen deler van 20000. De som is dus niet kloppend te maken.

Uitwerking opgave **14**

Laten we de eerste termen van deze rij berekenen modulo 100:

$$49, 43, 07, 01, 07, 07, 49, 43, \ldots$$

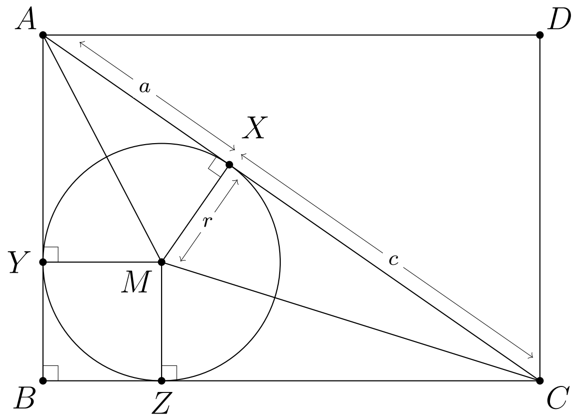
We zien dat de zevende en de achtste hetzelfde zijn als de eerste en de tweede term. Dus bij de zevende term begint het weer net zoals vooraan. Hieruit volgt dat de n-de term in de rij altijd gelijk is aan de $(n+6)$-de term, voor elk natuurlijk getal n. Deling met rest door 6 geeft

$$2018 = 336 \cdot 6 + 2.$$

Dus de rest is 2, en de 2018-de term is gelijk aan de tweede term, namelijk 43.

Uitwerking opgave **15**

Kies de punten D, Y, Z en M zoals hieronder is aangegeven. Doe hetzelfde voor de afstanden a, c en r.



Merk op dat $BZMY$ een vierkant is met oppervlakte r^2. Verder geldt

$$\begin{aligned}\text{Opp}\,\triangle ABC &= \text{Opp}\,\triangle AXM + \text{Opp}\,\triangle AYM + \text{Opp}\,\triangle CXM + \text{Opp}\,\triangle CZM + r^2 \\ &= 2\,\text{Opp}\,\triangle AXM + 2\,\text{Opp}\,\triangle CXM + r^2 \\ &= ar + cr + r^2\end{aligned}$$

$ABCD$ is een rechthoek met oppervlakte $(a+r)(c+r)$. Dus

$$\text{Opp}\,\triangle ABC = \text{Opp}\,\triangle CDA = (a+r)(c+r) - (ar + cr + r^2) = ac$$

Het antwoord is dus $a \cdot c$, en bij de gegeven keuzes van a en c is dat 15.

Uitwerking opgave **16**

Stel dat het kan voor een bepaalde n. Dan is

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

te verdelen in twee gelijke delen, die allebei geheel zijn. Dus $\sum_{k=1}^{n} k$ is even.
We kunnen de bovenstaande som sorteren als

$$(1+n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \cdots$$

De laatste term is $(n/2 + (n/2+1))$ als n even is, en $(n+1)/2$ als n oneven is. Merk op dat elke term $d + (n+1-d)$ gelijk is aan $n+1$. Daaruit zien we dat, als n even is,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Als n oneven is, dan zijn er slechts $(n-1)/2$ paren $(d, n+1-d)$, maar behalve die paren moeten we ook nog het losse getal $(n+1)/2$ erbij optellen. De som wordt dan

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n-1}{2} \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uit deze formules zien we dat $\sum_{k=1}^{n} k$ precies dan even is, als $n(n+1)$ een viervoud is. Een van $n, n+1$ is oneven, dus de andere moet deelbaar zijn door 4. Dit is het geval als n een viervoud is, en als $n+1$ een viervoud is. Daarentegen, als de rest van n, bij deling door 4 gelijk is aan 1 of 2, dan is $n(n+1)$ geen viervoud.

Uit 21 tot en met 26 voldoen alleen 23 en 24 aan deze conditie. Dus voor $21, 22, 25$ en 26 kan het zeker niet. Voor $n = 23$ en $n = 24$ lukt het misschien, dat moeten we nog nagaan.

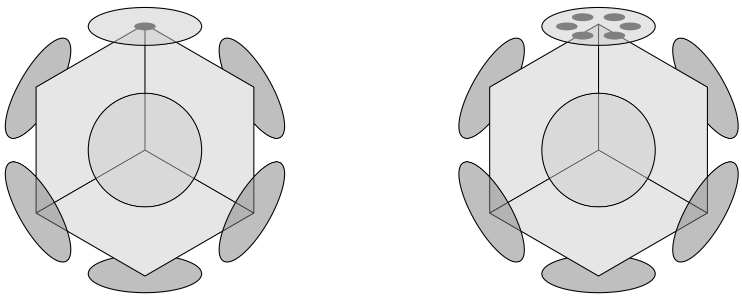
Een manier om $\sum_{k=1}^{n} k$ in twee gelijke delen verdelen (als het even is), is als volgt. Begin met de grootste getallen $\leq n$ op te tellen, zolang je onder $\sum_{k=1}^{n} k/2$ blijft. Op het laatst tel je er nog een kleiner getal bij op, zodat je op $\sum_{k=1}^{n} k/2$ uit komt. Dan heb je aan een kant van de weegschaal het goede gewicht. De overige getallen $\leq n$ tellen samen op tot $\sum_{k=1}^{n} k - \left(\sum_{k=1}^{n} k/2\right)$, dus ook aan de andere kant van de weegschaal heb je dat gewicht.

In onze concrete gevallen levert dit

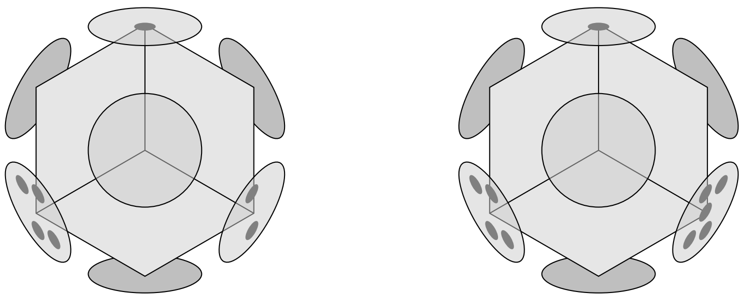
$$\begin{aligned}
&23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 15 &&= 138,\\
&1 + 2 + \cdots + 14 + 16 + 17 &&= 138,\\
&24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 3 &&= 150,\\
&1 + 2 + 4 + 5 + \cdots + 17 &&= 150.
\end{aligned}$$

Uitwerking opgave **17**

We kunnen de kubus in de opgave zó draaien, dat de hoek met 0 zoveel mogelijk aan de voorkant zit. Omdat de cijfers 1 en 6 tegenover elkaar zitten, kunnen we er ook nog voor zorgen, dat ofwel 1 ofwel 6 aan de bovenkant te zien is.

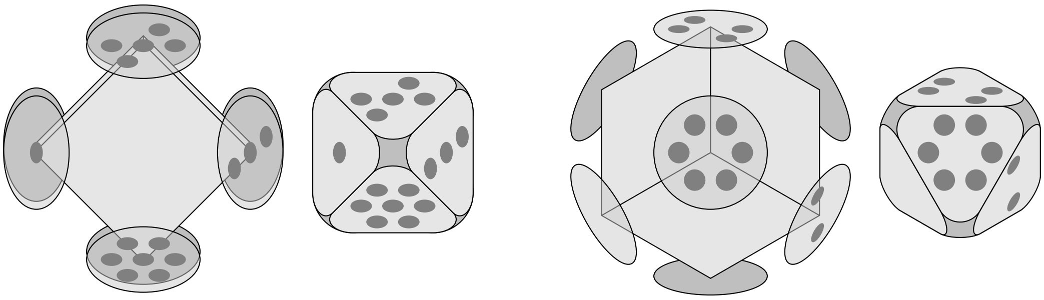


Links van de voorkant kan elk getal van 2 tot en met 5 te zien zijn. Rechts van de voorkant kunnen vervolgens nog twee getallen van 2 tot en met 5 te zien zijn, bijvoorbeeld 2 en 5 als links 4 te zien is.



Dit geeft $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden voor de getallen van de hoeken die zichtbaar zijn, als we de hoek met 0 zoveel mogelijk naar voren houden. De getallen van de hoeken die niet zichtbaar zijn, zijn af te leiden uit de zichtbare getallen, dus het antwoord is 16.

De hoeken van een kubus komen overeen met de zijden van een achtvlak, oftewel een octaëder. Er zijn dus ook 16 verschillende octaëdrische dobbelstenen met de getallen 0 tot en met 7 op de zijden, zó dat elk tweetal tegenover elkaar liggende zijden som 7 heeft.



Uitwerking opgave **18**

Als we een getal van de vorm $2242222\ldots2222$ gaan delen door 2018 door middel van een staartdeling, zien we al na de eerste stap iets opmerkelijks. We zien namelijk, dat het getal waarmee we verder gaan, ontstaat door het laatste cijfer van het getal waarmee we begonnen, weg te halen.

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
2018 \,/\, & 2242222\ldots2222 \,\backslash\, 111\ldots1 \\
& \underline{2018} \\
& 224222\ldots2222 \\
& \underline{2018} \\
& 22422\ldots2222 \\
& \underline{2018} \\
& 2242\ldots2222 \\
& \ddots\quad\vdots \\
& 2242 \\
& \underline{2018} \\
& 224
\end{array}
$$

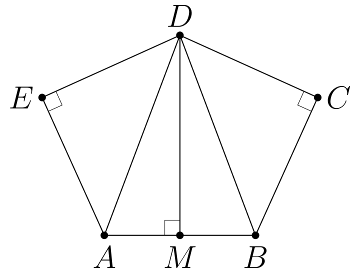
Het weghalen van het laatste cijfer zet zich voort, en uiteindelijk zien we dat een getal van de vorm $2242222\ldots2222$ rest 224 heeft bij deling door 2018. Een getal van de vorm

$$2242222\ldots22221998$$

is dus deelbaar door 2018.

Uitwerking opgave **19**

We noemen de hoeken van de tegel A tot en met E, en we definiëren M als het midden van AB.



Volgens de stelling van Pythagoras geldt

$$|AD|^2 = |DB|^2 = 2^2 + 2^2 = 8.$$

Dus ABD is een gelijkbenige driehoek met zijden $2, \sqrt{8}, \sqrt{8}$. Vanwege de gelijkbenigheid $\measuredangle BMD = 90°$, dus BMD is een rechthoekige driehoek met $|MB| = 1$. Pythagoras zegt dan dat

$$|DM|^2 = |DB|^2 - |MB|^2 = 8 - 1 = 7,$$

dus $|DM| = \sqrt{7}$.

We schrijven Opp voor de oppervlakte van een figuur.

$$\begin{aligned} \mathrm{Opp}(\text{tegel}) &= \mathrm{Opp}(ADE) + \mathrm{Opp}(BCD) + \mathrm{Opp}(AMD) + \mathrm{Opp}(BMD) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{7} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{7} = 4 + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Uitwerking opgave **20**

Vanwege 05, 23, 41, 67 en 89 zijn alle cijfers nodig. Vanwege 11 zit het cijfer 1 op beide dobbelstenen. Vanwege 02, 03 en 23 is het andere cijfer dat op beide dobbelstenen zit 0, 2 of 3. Vanwege 43, 47 en 37 is het andere cijfer dat op beide dobbelstenen zit 4, 3 of 7. Dus 1 en 3 zijn precies de cijfers die op beide dobbelstenen zitten. Vanwege 07, 47, 67, en 97, zijn de cijfers van de dobbelsteen zonder 7 als volgt: $0, 1, 3, 4, 6, 9$.

De unieke cijfers van die dobbelsteen zijn $0, 4, 6, 9$. Van die cijfers kunnen we geen priemgetal onder de 100 maken (meervoudig gebruik van cijfers toegestaan). De unieke cijfers van de andere dobbelsteen zijn $2, 5, 7, 8$. Daarvan kunnen we geen tweecijferig priemgetal maken (meervoudig gebruik van cijfers toegestaan). Dus voor een priemgetal onder de 100 zonder 1 of 3 hebben we cijfers van beide dobbelstenen nodig. Hieruit volgt dat elk priemgetal onder de 100 gegooid kan worden.