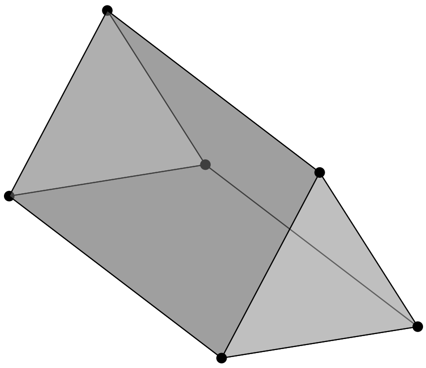
28e Wiskundetoernooi

Radboud Universiteit · universität bonn · KU LEUVEN

2019 Estafette

Opgave **1** (30 punten)

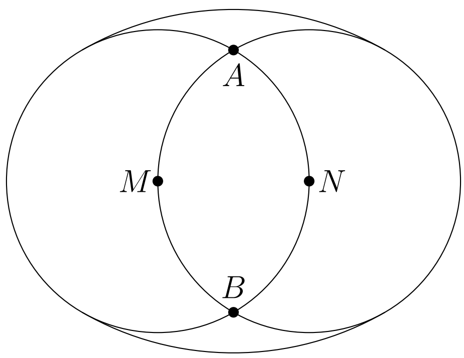
Zij P een driehoekig prisma.



We nummeren de hoekpunten van P willekeurig van 1 tot en met 6. We noemen de nummering *mooi* als, voor elk paar hoekpunten dat op één ribbe ligt, de twee nummers meer dan 1 verschillen. Hierbij wordt het verschil tussen 1 en 6 als 1 beschouwd.

Wat is de kans dat de nummering mooi is?

Opgave **2** (20 punten)



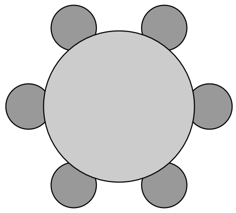
Gegeven zijn twee cirkels met straal 1, zodat hun middelpunten M en N onderlinge afstand 1 hebben. Laat A en B de snijpunten van de twee cirkels zijn.

Door hieraan cirkelbogen toe te voegen vormen we een ovaal. De bovenste cirkelboog is een deel van de kleinste cirkel met middelpunt B, die de oorspronkelijke twee cirkels bevat. Net zo is de onderste cirkelboog een stuk van een cirkel met middelpunt A.

Bepaal de omtrek van het ovaal.

Opgave 3 (20 punten)

6 personen zitten tijdens een buffet te eten aan een tafel. Elk van de 6 personen heeft twee buren.



Een persoon is een langzame eter, en blijft zitten. De andere 5 staan op, halen opnieuw eten, en komen weer terug aan de tafel.

Het blijk dat iedereen andere buren heeft gekregen.

Op hoeveel manieren kan dat?

Opgave 4 (20 punten)

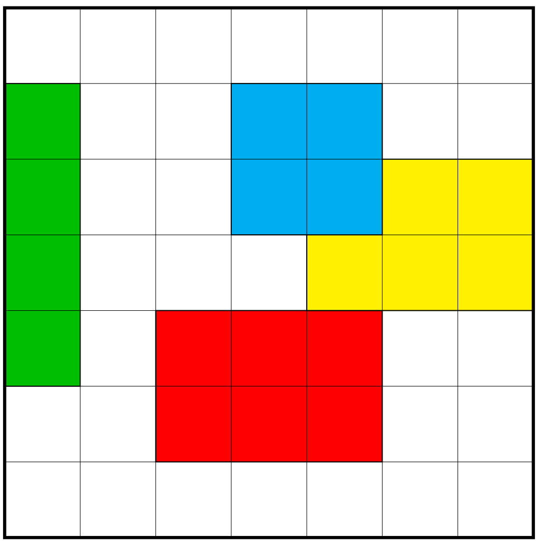
Er zijn gehele getallen x en y, zodat $0 < x < y$ en

$$x^3 + 2xy + y^3 = 2019$$

Wat is y?

Opgave 5 (30 punten)

Hoeveel rechthoeken kunnen er gevormd worden met de lijnen in een 7×7-rooster?

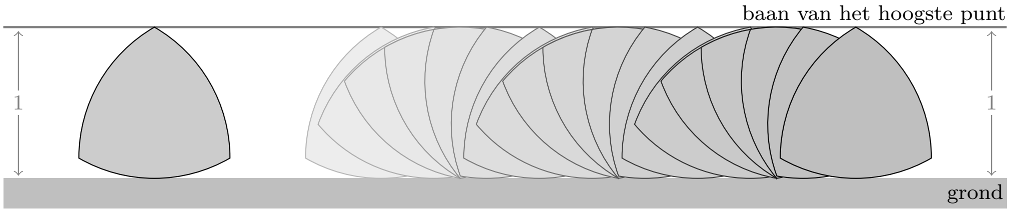


Opgave 6 (20 punten)

We delen $(2019^{2019})^{(2019^{2019})}$ door 7. Wat is de rest?

Opgave 7 (30 punten)

Een Reuleaux-driehoek ontstaat uit een gelijkzijdige driehoek door cirkelbogen toe te voegen. Zo een Reuleaux-driehoek heeft de eigenschap, dat – als hij over een horizontale weg rolt – zijn hoogste punt altijd op dezelfde hoogte is. Hieronder zie je dat gedemonstreerd.

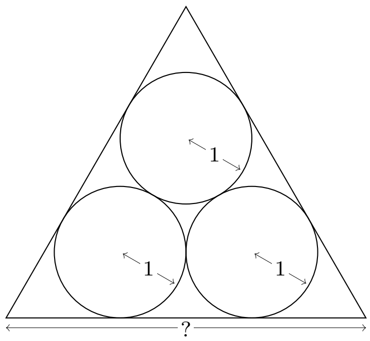


Van een zekere Reuleaux-driehoek bevindt het hoogste punt zich telkens op hoogte 1 ten opzichte van de grondlijn.

Wat is de omtrek van deze Reuleaux-driehoek?

Opgave 8 (20 punten)

Drie cirkels met straal 1 raken aan elkaar en vormen zo een klont.



Wat is de lengte van de zijde van de omgeschreven gelijkzijdige driehoek van deze klont cirkels?

Opgave 9 (30 punten)

Sjakie heeft net een tablet chocolade gegeten en is met de wikkel, een rechthoek met zijden van 12 inch en 10 inch, aan het spelen. Hij plooit de wikkel langs een recht lijnstuk, zodat één van de hoekpunten in het midden van de overstaande korte zijde komt te liggen. Hoe lang is het lijnstuk waarlangs hij de wikkel geplooid heeft, in inches?

Opgave 10 (20 punten)

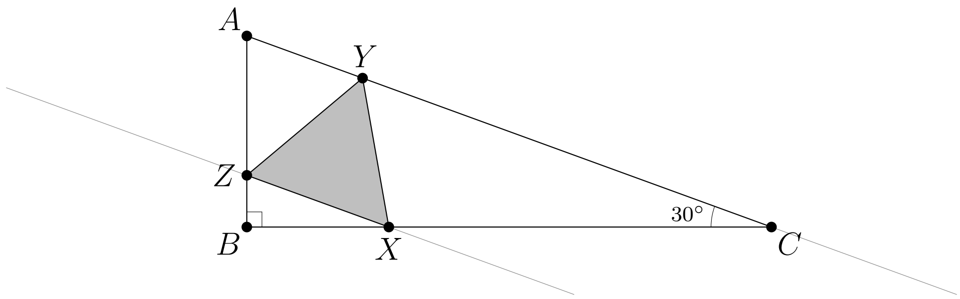
Roos en Teuntje willen samen gaan shoppen. Ze spreken af op de hoek van de straat tussen 3 en 4 uur. Wie als eerste komt wacht maximaal een kwartier, en gaat terug naar huis als de ander er dan nog niet is. Zowel Roos als Teuntje komen op een willekeurig tijdstip tussen 3 en 4 uur aan. Wat is de kans dat ze gaan winkelen?

Opgave 11 (30 punten)

Wat is het grootste natuurlijke getal dat kleiner of gelijk is aan

$$\frac{2^2-1}{2^2+1}+\frac{3^2-1}{3^2+1}+\frac{4^2-1}{4^2+1}+\cdots+\frac{2019^2-1}{2019^2+1} \quad ?$$

Opgave 12 (30 punten)



$\triangle ABC$ is een rechthoekige driehoek met een rechte hoek bij B, terwijl $\angle C = 30°$. Op de zijde BC ligt een punt X, op de zijde AC een punt Y en op de zijde AB een punt Z, zodat $\triangle XYZ$ gelijkzijdig is en ZX parallel met AC is.

Bepaal $\text{Opp}(\triangle XYZ) : \text{Opp}(\triangle ABC)$.

Opgave 13 (30 punten)

Op een paar positieve gehele getallen, die hetzelfde mogen zijn, passen we de volgende procedure toe.

Laat m de waarde zijn van het kleinste van beide getallen aan het begin van de procedure.

- Verdubbel het kleinste getal;
- verminder het andere getal met m.

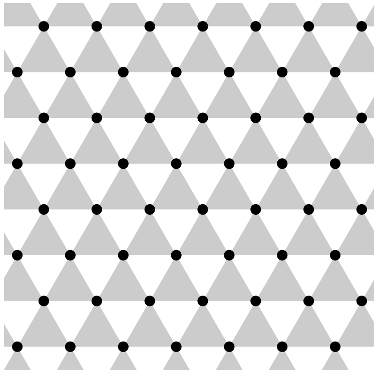
Deze procedure herhalen we steeds. Bijvoorbeeld:

$$11, 27 \;\rightarrow\; 16, 22 \;\rightarrow\; 6, 32 \;\rightarrow\; \cdots$$

Als de getallen gelijk zijn, is een van de getallen die de procedure oplevert 0 en dan stopt het proces. Bij sommige paren gebeurt dat, bij andere paren gaat het proces tot in het oneindige door.

Welke drie getallen onder de 100 *vormen samen met* 37 *een paar waarbij het proces stopt?*

Opgave **14** (20 punten)



Gegeven is een driehoekig rooster waarin alle naburige punten afstand 1 hebben. Als we de afstand tussen twee roosterpunten kwadrateren krijgen we een getal, bijvoorbeeld 1, 3 of 4. Wat zijn de twee kleinste kwadraten van zulke afstanden, die geen priemgetal en niet het kwadraat van een geheel getal zijn?

Opgave **15** (20 punten)

De volgende som geldt:

$$\begin{array}{r} \text{KAJAK} \\ \text{KAJAK} \\ \text{KAJAK} \\ \text{KAJAK} \\ \text{KAJAK} \\ \text{KAJAK} \\ \hline \text{SPORT} \end{array} +$$

Hierbij staat elke letter voor een ander cijfer. Wat zijn de waarden van K, A en J?

Opgave **16** (30 punten)

Voor elk natuurlijk getal, beginnend met 1 en eindigend met 10^{2019}, berekenen we het product van de cijfers die verschillend van nul zijn. Daarna tellen we alle 10^{2019} uitkomsten op. wat is de 2019-de machtswortel van het resultaat?

Opgave **17** (20 punten)

We bekijken een ronde biljarttafel met middelpunt M en diameter 2,0615 meter. Er ligt een biljartbal met diameter 0,0615 meter op de biljarttafel. De (kleinste) afstand tussen de biljartbal en de tafelrand is 1/2 m.

Er is een lijn L die zowel de biljarttafel als de biljartbal in twee even grote stukken verdeeld. We stoten de biljartbal weg, loodrecht op L. Het blijkt dat de bal na een aantal keer terugkaatsen van de band weer terug komt op zijn beginplek.

Wat is de afstand in meters, die de biljartbal in zo'n tour aflegt?

Opgave **18** (20 punten)

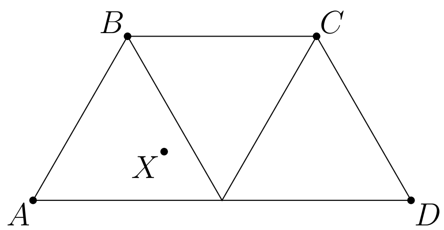
We nemen de 12 plaatjes uit het kaartspel: 4× B (boer), 4× V (vrouw) en 4× H (heer). We leggen deze achter elkaar op tafel, zó dat het volgende geldt.

- Voor de meeste tweetallen kaarten B,V geldt, dat de V rechts ligt van de B;
- Voor de meeste tweetallen kaarten V,H geldt, dat de H rechts ligt van de V;
- Voor de meeste tweetallen kaarten H,B geldt, dat de B rechts ligt van de H;
- De eerste en de laatste kaart is een V.

Wat is de volgorde van de kaarten, van links naar rechts?

[Geef bijvoorbeeld VVBBHHBBHHVV als antwoord.]

Opgave **19** (30 punten)



$ABCD$ bestaat uit drie gelijkzijdige driehoeken, met zijden van lengte 1. Het punt X ligt in $ABCD$. Bepaal de kleinste waarde van

$$\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD}.$$

Opgave **20** (30 punten)

Er zijn positieve gehele getallen n waar het volgende voor geldt:

> Voor elk geheel getal x, is het getal
>
> $$(x^2 + 3^2)(x^2 + 4^2)(x^2 + 5^2)$$
>
> deelbaar door n.

Wat is het grootste positieve gehele getal n waarvoor dit geldt?