28e Wiskundetoernooi

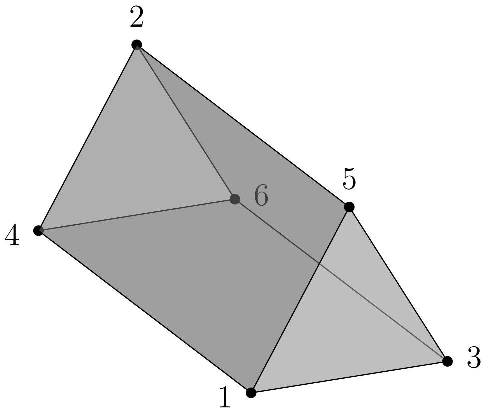
2019 Estafette

Radboud Universiteit · universitätbonn · KU LEUVEN

Uitwerking opgave 1

We gaan het aantal mooie nummeringen tellen. Neem voor het gemak aan dat nummer 1 in de voorste driehoek ligt. Dan ligt nummer 2 in de achterste driehoek. Dus nummer 3 ligt in de voorste driehoek. Zo doorgaande zien we dat nummers 1, 3 en 5 in de voorste driehoek liggen, en nummers 2, 4 en 6 in de achterste driehoek.

Het hoekpunt van de achterste driehoek dat met het hoekpunt met nummer 3 een ribbe gemeen heeft, kan alleen maar nummer 6 hebben. Net zo kan het hoekpunt van de voorste driehoek dat met het hoekpunt met nummer 4 een ribbe gemeen heeft, alleen maar nummer 1 hebben. De laatste ribbe tussen een hoekpunt van de voorste driehoek en de achterste driehoek ligt tussen de hoekpunten met nummers 2 en 5.

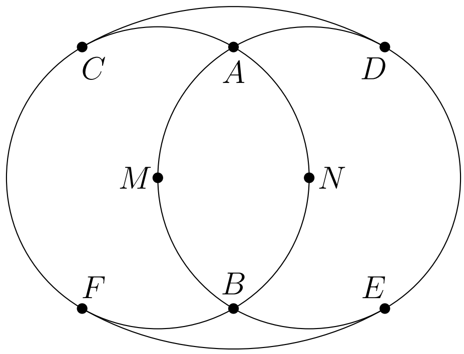


Er zijn precies 6 mogelijkheden om de voorste driehoek te nummeren met 1, 3 en 5 en elk van die 6 kan op precies één manier worden voortgezet tot een mooie nummering van P. Op dezelfde manier kunnen we inzien dat er precies 6 mooie nummeringen zijn waarbij het label 1 in de achterste driehoek komt. Dus er zijn in totaal 12 mooie nummeringen.

Het totaal aantal nummeringen is $6! = 720$ en 12 daarvan zijn mooi, dus de kans daarop is $12/720 = 1/60$.

Uitwerking opgave 2

We geven de cirkel met middelpunt M aan met C_M, en die met middelpunt N noemen we C_N. Laat C, D, E, F de snijpunten van de cirkelbogen met C_M en met C_N zijn:



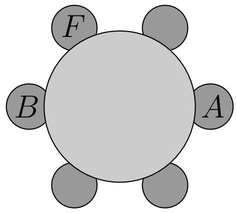
De constructie van de cirkelbogen zegt dat C het punt van C_M is dat het verst van B verwijderd ligt. Dus C ligt precies tegenover B op C_M. Net zo zijn A en F tegenoverliggende punten op C_M. De driehoeken $\triangle AMN$ en $\triangle BMN$ zijn gelijkzijdig, dus alle hoeken daarin zijn $60°$. Aangezien C, M en B op één lijn liggen, volgt dat de hoek $\angle CMN$ grootte $120°$ heeft. Dan zien we dat ook de hoeken $\angle FMN$ en $\angle CMF$ $120°$ groot zijn, oftewel $2\pi/3$ radialen. De lengte van de cirkelboog van C naar F wordt daarmee $2\pi/3$. Wegens de symmetrie is dat ook de lengte van de cirkelboog van D naar E.

De boog van C naar D ligt op een cirkel van straal $|CB| = 2|MB| = 2$. Deze cirkelboog overspant een hoek $\angle MBN$ van $60°$, dus zijn lengte is $2 \cdot 2\pi/6 = 2\pi/3$. Wegens de symmetrie is dat ook de lengte van de cirkelboog tussen E en F. In totaal wordt de omtrek van het ovaal daarmee $4 \cdot 2\pi/3 = 8\pi/3$.

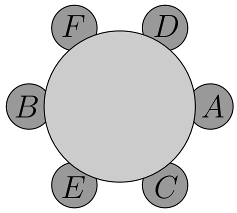
Uitwerking opgave **3**

Noem de persoon die is blijven zitten A en zijn twee oorspronkelijke buren B en F. Voor B en F zijn 3 posities mogelijk, en er zijn 6 manieren waarop B en F deze posities kunnen innemen. Hiervan zijn 2 manieren echt verschillend: B of F zit recht tegenover A, of niet.

In het eerste geval mogen we aannemen dat A, B en F als volgt verdeeld zijn over de tafel:

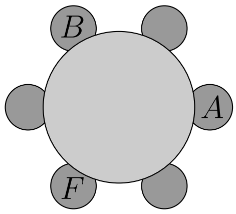


Tussen A en F moet D zitten, want D kan niet naast C of E zitten. C zit niet naast B, dus C zit ook naast A.

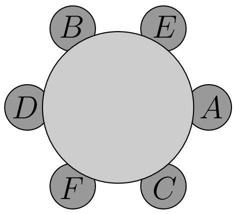


Er is dus precies 1 rangschikking mogelijk van de overige tafelgasten.

In het tweede geval mogen we aannemen dat A, B en F als volgt verdeeld zijn over de tafel:



E zit tegenover F, en C zit tegenover B.



Er is dus weer precies 1 rangschikking mogelijk van de overige tafelgasten.

Dus voor elk van de 6 rangschikkingen van B en F is er precies 1 rangschikking mogelijk is van de overige tafelgasten. Het antwoord is dus $6 \cdot 1 = 6$.

Uitwerking opgave **4**

Omdat 2019 oneven is, is precies een van de getallen x en y oneven. Stel dat x' het even getal is en y' het oneven getal. Dan heeft $(y')^3$, net als 2019, rest 3 bij deling door 4. Dus heeft ook y' rest 3 bij deling door 4. We onderscheiden vier gevallen:

- $y' = 3$.
  Dan is $x^3 + 2xy + y^3$ niet precies eenmaal deelbaar door 3. 2019 is dat wel, dus er zijn geen oplossingen.
- $y' = 7$.
  Omdat 2019 rest 3 bij deling door 7 heeft, heeft $(x')^3$ dat ook. Dit is echter onmogelijk: een derdemacht kan alleen 0, 1 en 6 als rest bij deling door 7 hebben.
- $y' \geq 15$.
  Dan is $x^3 + 2xy + y^3 > (y')^3 > 15^2 \cdot 10 = 2250$.
- $y' = 11$.
  Als $x' \geq y'$, dan is $x^3 + 2xy + y^3 > 2 \cdot (y')^3 > 11^2 \cdot 20 = 2420$. Dus $x' < y'$ en $y = y' = 11$. Omdat de andere gevallen spaak lopen, moet 11 wel het antwoord zijn. Inderdaad werkt $x = 8$ en $y = 11$.

Uitwerking opgave **5**

We geven de kleine vierkantjes in dit rooster een horizontale coördinaat (van 1 tot en met 7) en een verticale coördinaat (ook van 1 tot en met 7). Elke rechthoek R gevormd door lijnen van het rooster wordt dan vastgelegd door vier getallen:

- de coördinaat x_1 van de meest linkse vierkantjes in R,
- de coördinaat x_2 van de meest rechtse vierkantjes in R,
- de coördinaat y_1 van de onderste vierkantjes in R,
- de coördinaat y_2 van de bovenste vierkantjes in R.

Om alle rechthoeken te tellen moeten we de mogelijkheden voor x_1, x_2, y_1, y_2 tellen, waarbij we wel moeten opleggen dat $x_1 \leq x_2$ en $y_1 \leq y_2$.

Claim: Om het paar (x_1, x_2) uit $1, 2, \ldots, 7$ te kiezen zijn er precies 28 mogelijkheden. Namelijk, kies eerst willekeurig een x tussen 1 en 7. Kies dan een x' uit $1, 2 \ldots, 7$. Tot nu toe hebben we $7^2 = 49$ mogelijkheden. Daarvan zijn er 7 met $x = x'$ en $49 - 7 = 42$ met $x \neq x'$. Elk tweetal uit $1, 2, \ldots, 7$ (dus met $x \neq x'$) vinden we zo twee keer (afhankelijk van welk element we eerst kiezen). Dus er zijn $7 \cdot 6/2 = 21$ dergelijke tweetallen. Bovendien kan elk tweetal x, x' met $x \neq x'$ op een unieke manier genummerd worden als x_1, x_2 met $x_1 < x_2$. In totaal zijn er dus $7 + 21 = 28$ mogelijke horizontale coördinaten voor R.

Om dezelfde manier kan je inzien dat er precies 28 manieren zijn om de verticale coördinaten van R te kiezen. Het aantal mogelijkheden voor R wordt daarmee $28^2 = 784$.

Uitwerking opgave **6**

De rest van 2019 bij deling door 7 is 3, want $2019 = 7 \cdot 288 + 3$. Nu gaan we rekenen modulo 7. Merk op dat $3^3 = 27$ en dat is -1 modulo 7. Dus $3^6 = (3^3)^2$ is modulo 7 gelijk aan $(-1)^2 = 1$.

Deling met rest geeft $2019 = 336 \cdot 6 + 3$. Modulo 7 geldt dan

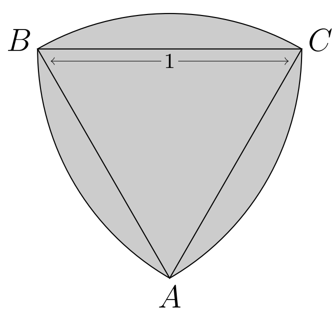
$$2019^{2019} \equiv 3^{6 \cdot 336 + 3} = (3^6)^{336} \cdot 3^3 \equiv 1^{336} \cdot -1 = -1.$$

Het getal 2019^{2019} is een product van een oneven aantal oneven getallen, dus het is oneven, zeg $2k + 1$. Daaruit volgt

$$(2019^{2019})^{(2019^{2019})} \equiv (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \cdot -1 = -1 \equiv 6.$$

Uitwerking opgave **7**

Laat A, B en C de hoekpunten van de Reuleaux-driehoek zijn. Op zeker punt van de rolweg zijn A en B het laagste en het hoogste punt (of omgekeerd). Volgens de aanname is het hoogteverschil daartussen 1, dus dat is ook de afstand tussen A en B. Hetzelfde werkt met een ander paar hoekpunten, dus A, B en C vormen een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 1.

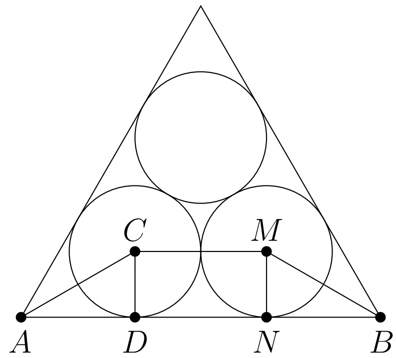


Bekijk nu het stukje van de rolweg waarop A het laagste punt is. Het hoogste punt doorloopt dan de hele cirkelboog tussen B en C. Dus elk punt op de cirkelboog tussen B en C heeft afstand 1 tot A, en deze cirkelboog is een deel van een cirkel met middelpunt A en straal 1. Vanuit A gezien overspannen de cirkelboog tussen B en C en de gelijkzijdige driehoek ABC dezelfde hoek. Dit is de binnenhoek in ABC, oftewel $60°$. De lengte van de cirkelboog tussen B en C wordt daarmee $1/6$ maal de omtrek van de cirkel met straal 1, dus $2\pi/6 = \pi/3$.

Door de rollen van A, B en C te verwisselen, zien we dat ook de andere twee cirkelbogen van de Reuleaux-driehoek lengte $\pi/3$ hebben. De omtrek van de Reuleaux-driehoek wordt daarmee $3 \cdot \pi/3 = \pi$.

Uitwerking opgave 8

Laat A het hoekpunt linksonder zijn, B het hoekpunt rechtsonder en C het middelpunt van de cirkel linksonder. Zij D het punt op AB dat het dichtst bij C ligt, het raakpunt van AB met de cirkel om C. Net zo noemen we het middelpunt van de cirkel rechtsonder M en het raakpunt van die cirkel met AB noemen we N.



Nu vormen C, D, N en M een rechthoek, dus $|DN| = |CM| = 2$.

De hoeken in de driehoek ACD zijn $30°, 60°$ en $90°$ en de lengte van CD is 1. Dus driehoek ACD is de helft van een gelijkzijdige driehoek, en de lengte van AC is 2. De lengte van AD is dan

$$\sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Net zo kunnen we inzien dat $|NB| = \sqrt{3}$. We concluderen dat

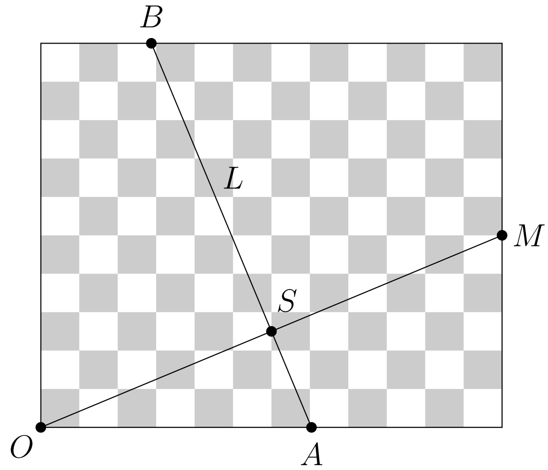
$$|AB| = |AD| + |DN| + |NB| = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Uitwerking opgave 9

We kiezen een coördinatenstelsel zodat de x-coördinaten van de wikkel precies 0 tot en met 12 zijn, en de y-coördinaten precies 0 tot en met 10. We gaan het hoekpunt $O = (0,0)$ vouwen naar het midden van de korte zijde met $x = 12$, dus naar het punt $M = (12,5)$. Zij S het middelpunt van het lijnstuk tussen O en $(12,5)$:

$$S = \left(6, \frac{5}{2}\right).$$

Dan ligt S zeker op de vouwlijn L. Laat A het punt zijn van L dat op de lange zijde met $y = 0$ ligt.



Dan is $\measuredangle OSA = \measuredangle MSA$, dus L ligt loodrecht op het lijnstuk OM. Verder geldt

$$|OM| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Laat B het snijpunt van lijn L met de lijn door de tegenoverliggende lange zijde van de rechthoek zijn. Dan hebben $|AB|$ en $|OM|$ dezelfde verhouding als de zijden van de rechthoek, oftewel

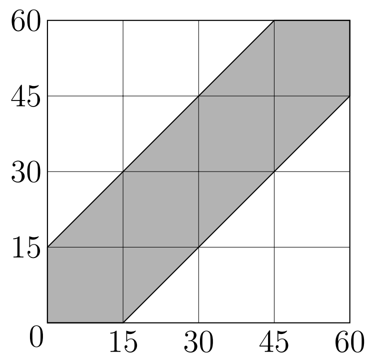
$$|AB| = \frac{10}{12} \cdot |OM| = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$$

We moeten alleen nog even aantonen dat B op een zijde van de rechthoek ligt, dus dat de x-coördinaat van B niet negatief is. Het verschil tussen de x-coördinaten van A en B is kleiner dan het verschil tussen de y-coördinaten van M en O, dus kleiner dan 5. Omdat de x-coordinaat van A groter is dan die van S, is de x-coördinaat van B groter dan $6 - 5 = 1$.

De lengte van de vouwlijn in de wikkel is dus $|AB| = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$ inch.

Uitwerking opgave **10**

Laten we dit uitzetten in een grafiek. Horizontaal staat hoeveel minuten na 3 uur Roos aankomt, verticaal hetzelfde voor Teuntje.



Als hun aankomsttijdstippen in het grijze gebied vallen gaan ze winkelen, anders niet. Het vierkant van alle mogelijke tijden tussen 3 en 4 uur bestaat uit 16 kleinere vierkantjes, en het oppervlak van het grijze gebied is 7 kleine vierkantjes. Dus de kans dat ze gaan shoppen is 7/16.

Uitwerking opgave **11**

Om te beginnen merken we op dat

$$\frac{k^2-1}{k^2+1} = \frac{k^2+1-2}{k^2+1} = 1 - \frac{2}{k^2+1}$$

voor elke k. De som in kwestie kan dan geschreven worden als

$$\sum_{k=2}^{2019} \frac{k^2-1}{k^2+1} = \sum_{k=2}^{2019} \left(1 - \frac{2}{k^2+1}\right) = 2018 - \sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1}. \tag{1}$$

De som $\sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1}$ kunnen we niet exact berekenen, maar wel afschatten. Een bovengrens wordt gegeven door

$$\sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1} < \sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{2019} \frac{(k+1)-(k-1)}{(k+1)(k-1)} = \sum_{k=2}^{2019} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right). \tag{2}$$

In deze laatste som komen bijna alle termen twee keer voor, een keer met een min (bij k) en een keer met een plus (bij $k+2$). Dat geldt alleen niet voor de begintermen 1/1 en 1/2, en ook niet voor de eindtermen 1/2019 en 1/2020. Hieruit volgt dat de rechterkant van (2) gelijk is aan

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}.$$

Dus $\sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1} < 3/2$. Verder hebben we een scherpe ondergrens voor deze som nodig, we moeten inzien dat hij groter dan 1 is. Daarbij gebruiken we dat

$$\frac{2}{k^2+1} > \frac{2}{(k+1)^2-1} = \frac{(k+2)-k}{(k+2)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}.$$

Om met deze stap niet te veel te verliezen van $\sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1}$, laten we een paar termen aan het begin staan:

$$\sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1} = \frac{2}{5} + \frac{2}{10} + \sum_{k=4}^{2019} \frac{2}{k^2+1} > \frac{2}{5} + \frac{2}{10} + \sum_{k=4}^{2019} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Met hetzelfde argument als voor (2) zien we dat we in de laatste som bijna alle termen een keer met plus en een keer met min voorkomen. Dus bijna alle termen vallen weg, en er blijft over

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} > \frac{21}{20} - \frac{2}{2020} > 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1000} > 1$$

Dus $\sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1} > 1$.

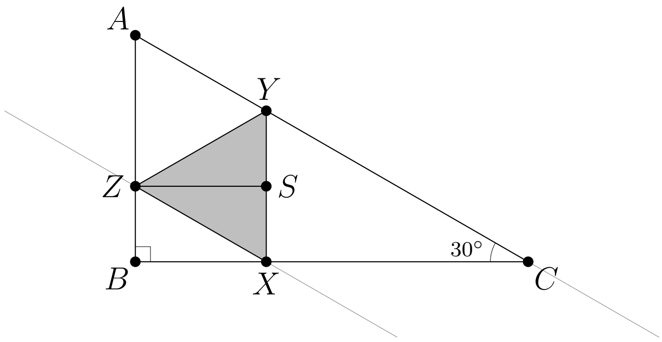
Nu keren we terug naar (1). Met de bovenstaande afschattingen zien we dat

$$2016 < \sum_{k=2}^{2019} \frac{k^2-1}{k^2+1} = 2018 - \sum_{k=2}^{2019} \frac{2}{k^2+1} < 2017$$

Dus het antwoord is 2016.

Uitwerking opgave **12**

Aangezien $\angle ZXY = 60° = \angle YAZ$, zijn AZ en YX evenwijdig. Dan $\angle AZY = \angle ZYX$, dus $\triangle AZY$ is gelijkzijdig en congruent met $\triangle XYZ$.



Zij S het middelpunt van XY, zodat ZS evenwijdig met BX is. Hieruit zien we dat $|ZB| = |XS| = |XY|/2$. Dus

$$\mathrm{Opp}(\triangle BZX) = \mathrm{Opp}(\triangle ZSX) = \mathrm{Opp}(\triangle XYZ)/2.$$

De driehoek $\triangle XYC$ is gelijkvormig met $\triangle BZX$ en heeft zijden die twee keer zo lang zijn, want $|XY| : |BZ| = 2$. Daaruit volgt

$$\mathrm{Opp}(\triangle XYC) = 4\,\mathrm{Opp}(\triangle BZX) = 2\,\mathrm{Opp}(\triangle XYZ)$$

In totaal vinden we

$$\begin{aligned}\mathrm{Opp}(\triangle ABC) &= \mathrm{Opp}(\triangle XYZ) + \mathrm{Opp}(\triangle AYZ) + \mathrm{Opp}(\triangle BZX) + \mathrm{Opp}(\triangle XYC)\\ &= \mathrm{Opp}(\triangle XYZ)\cdot(1+1+1/2+2) = \mathrm{Opp}(\triangle BZX)\cdot 9/2\end{aligned}$$

Dit betekent dat $\mathrm{Opp}(\triangle ABC) : \mathrm{Opp}(\triangle XYZ) = 9 : 2$.

Uitwerking opgave **13**

Het verdubbelen van het kleinste getal komt op hetzelfde neer als het vermeerderen van het kleinste getal met m. Dus de som van beide getallen verandert niet tijdens de procedure. De grootste gemene deler van beide getallen blijft hetzelfde of verdubbelt tijdens de procedure. Dit zie je door de twee stappen van de procedure in omgekeerde volgorde uit te voeren.

Omdat 37 een priemgetal is, is de grootste gemene deler van beide getallen aanvankelijk ofwel 1 ofwel 37. Neem eerst aan dat de grootste gemene deler 37 is. Omdat

$$37, 37 \;\to\; 0, 37 \qquad \text{en} \qquad 37, 74 \;\to\; 37, 74 \;\to\; 37, 74 \;\to\; \cdots$$

stopt het proces alleen bij het paar $37, 37$.

Neem vervolgens aan dat de grootste gemene deler 1 is. Als het herhalen van de procedure eindigt, dan is de grootste gemene deler g van beide getallen een macht van 2, omdat de grootste gemene deler gelijk blijft of verdubbelt tijdens de procedure. Het kleinste getal is 0, dus het grootste getal is g, en dat is ook de som van beide getallen.

Aanvankelijk is de som van beide getallen ook g. Hieruit kan men afleiden dat het proces alleen kan stoppen bij $27, 37$ en $37, 91$.

We tonen aan dat het proces inderdaad stopt voor deze gevallen. Stel namelijk dat het proces nog niet gestopt is. Dan zijn beide getallen samen 64 of 128, dus beide getallen zijn even vaak deelbaar door 2. Daarom zal de procedure ervoor zorgen dan beide getallen vaker deelbaar door 2 worden. Dit kan niet alsmaar doorgaan, dus het proces stopt.

Uitwerking opgave 14

Kies een oorsprong O en van daaruit twee basisvectoren van lengte 1 in het rooster, die onderling een hoek van $60°$ maken. Zij P een roosterpunt dat je kunt bereiken uit O door m stappen in de ene basisrichting en n stappen in de andere basisrichting. Met de cosinusregel zien we dat

$$|OP|^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos(120°) = m^2 + n^2 + mn.$$

We maken een tabel met de mogelijke afstanden voor kleine m en n.

$m\backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	4	9	16	25
1	1	3	7	13	21	31
2	4	7	12	19	28	39
3	9	13	19	27	37	49
4	16	21	28	37	48	61
5	25	29	39	49	61	75

Die kleinste twee getallen in deze tabel, die niet priem en geen kwadraat zijn, zijn 12 en 21. We hoeven geen verdere afstanden te bekijken, want het kwadraat daarvan is altijd minstens $6^2 = 36$.

Uitwerking opgave 15

K kan niet 0 zijn, omdat T en K verschillen. Omdat SPORT slechts 5 cijfers heeft, moet $\text{K} = 1$. Dan $\text{T} = 6$. Nu heeft SPORT precies 5 cijfers, dus $\text{A} \leq 6$. Maar A kan niet even zijn, aangezien R ongelijk A is. Ook $\text{A} \neq 1 = \text{K}$. Als $\text{A} = 3$, dan

$$6 \cdot \text{KAJAK} = 78186 + 600 \cdot \text{J}$$

Hierbij moet de uitkomst SPORT uit vijf cijfers verschillend van 1 en 3 bestaan. Als $\text{J} \leq 1$, dan $\text{P} = 8 = \text{R}$. Als $\text{J} \geq 4$, dan $\text{S} = 8 = \text{R}$. Verder mag J niet 3 zijn omdat A dat al is, en als $\text{J} = 2$ dan $\text{O} = 3 = \text{A}$.

Dus $\text{A} \neq 3$, en er moet wel $\text{A} = 5$. Dan

$$6 \cdot \text{KAJAK} = 90306 + 600 \cdot \text{J}$$

Dan $\text{R} = 0$, $\text{S} = 9$ en $\text{P} \geq 2$. Voor J zijn alleen de mogelijkheden $2, 3, 4, 7, 8$ nog over. Als $\text{J} = 2$ of 7, dan $\text{O} = 5$. Als $\text{J} = 3$ of 8, dan $\text{O} = 1$. Dus $\text{J} = 4$. Dan $\text{KAJAK} = 15451$ en $\text{SPORT} = 92706$.

Uitwerking opgave 16

Laten we eerst eens kijken naar een eenvoudiger geval, waarbij we lopen van 1 tot en met 100. Voor elk van die getallen n bepalen we het product $v(n)$ van de cijfers die verschillend van nul zijn, en dan tellen we de 100 uitkomsten op.

De bijdrage van 100 is 1, en dat zouden we ook kunnen krijgen als bijdrage van het getal 0. Dus we kunnen net zo goed lopen van 0 tot en met 99, dat geeft hetzelfde eindresultaat. Als n cijfers a (eenheden) en b (tientallen) heeft, dan $v(n) = v(a) \cdot v(b)$, waarbij $v(0) = 1$ en $v(c) = c$ voor $c = 1, 2, \ldots, 9$.

Als n van 0 tot en met 99 loopt, lopen de cijfers a en b beide van 0 tot en met 9. Dus

$$\sum_{n=0}^{99} v(n) = \sum_{a=0}^{9} \sum_{b=0}^{9} v(a) \cdot v(b)$$

Aan de rechterkant kunnen we de bijdragen van a en b scheiden:

$$\Big(\sum_{a=0}^{9} v(a) \Big) \cdot \Big(\sum_{b=0}^{9} v(b) \Big)$$

Nu zien we dat de eenheden a en de tientallen b precies dezelfde bijdrage leveren aan $\sum_{n=0}^{99} v(n)$, en kunnen we die som uitrekenen:

$$\sum_{n=0}^{99} v(n) = \Big(\sum_{a=0}^{9} v(a) \Big)^2 = (1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9)^2 = 46^2.$$

Merk op dat 46 de 2-de machtswortel van 46^2 is.

Nu bekijken de echte opgave. Net zoals hierboven geldt $v(10^{2019}) = 1 = v(0)$, dus we kunnen n net zo goed van 0 tot en met $10^{2019} - 1$ laten lopen. Dat zijn precies alle niet-negatieve gehele getallen met 2019 cijfers, mits we voor getallen met minder cijfers aan de linkerkant zoveel nullen erbij denken dat het precies 2019 cijfers worden.

Als n van 0 tot en met $10^{2019} - 1$ loopt, lopen de 2019 cijfers allemaal van 0 tot en met 9, en elke combinatie komt precies één keer voor. Net zoals hierboven levert elk cijfer dezelfde bijdrage aan de som, en er geldt

$$\sum_{n=0}^{10^{2019}-1} v(n) = \Big(\sum_{a=0}^{9} v(a) \Big)^{2019} = (1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9)^{2019} = 46^{2019}.$$

De 2019-de machtswortel van deze uitkomst is uiteraard 46.

Uitwerking opgave 17

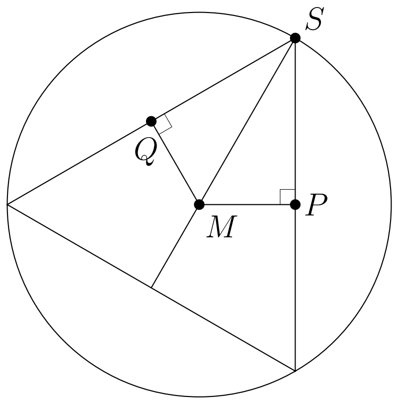
Laat M het midden van de tafel zijn, en P het midden van de biljartbal. Dan is L de lijn door M en P. We kiezen coördinaten zodat $M = (0, 0)$ en $P = (1/2, 0)$ en de bal in de positieve y-richting wordt gestoten.

Zij S het midden van de bal als deze de eerste keer tegen de band aan komt. S heeft x-coördinaat $1/2$ en afstand 1 tot M, dus $S = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Zij Q het punt dat je krijgt door

P te spiegelen ten opzichte van de lijn door M en S. De driehoek $\triangle MQS$ is congruent met $\triangle MPS$. In het bijzonder

$$\measuredangle MSQ = \measuredangle MSP = \arcsin\left(\frac{|MP|}{|MS|}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ.$$

Aangezien MS bij S loodrecht op de band staat, betekent dit dat de bal uit S wegrolt over het lijnstuk SQ.



Als de bal over Q rolt, is de situatie helemaal analoog aan het begin in P: er geldt $|QM| = |MP| = 1/2$, QM staat loodrecht op SQ en de bal rolt in de richting van SQ verder, zodanig dat hij na een aantal keer kaatsen weer terugkomt in Q.

De richting van SQ is 120° gedraaid ten opzichte van (de richting van) PS. Dus het vervolg van de bal na Q bestaat uit trajecten die er uit zien als PSQ, alleen telkens 120° verder gedraaid. Na drie dergelijke trajecten zijn we weer terug in P.

Uit de symmetrie van de figuur zien we dat de daarbij afgelegde afstand 6 keer de lengte van PS is. De punten P en S hebben dezelfde x-coördinaat, dus hun afstand is het verschil in de y-coördinaten: $\sqrt{3}/2$.

In een ronde legt de bal af: $6 \cdot \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$.

Uitwerking opgave 18

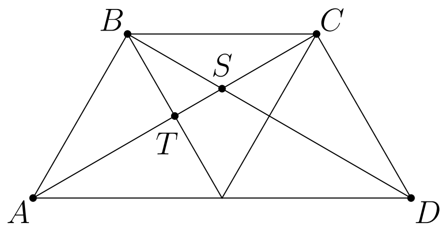
Vanwege de vierde voorwaarde, komt de eerste voorwaarde erop neer, dat tussen de eerste twee vrouwen meer boeren zitten dan tussen de laatste twee. Net zo komt de tweede voorwaarde erop neer, dat tussen de laatste twee vrouwen meer heren zitten dan tussen de eerste twee.

Als er tussen de eerste twee vrouwen hooguit een boer zit en tussen de laatste twee vrouwen hooguit een heer, dan is het rijtje kaarten dus van de vorm VBV......VHV. Dit geeft alleen VBVHHHBBBVHV als een oplossing.

Stel nu dat er minstens twee boeren tussen de eerste twee vrouwen zitten. Dan moet er ook een heer tussen de eerste twee vrouwen zitten, anders geldt de derde voorwaarde niet. Volgens de tweede voorwaarde zit er precies een heer tussen de eerste twee vrouwen, en ten minstens twee heren tussen de laatste twee vrouwen. Dan moet er ook een boer tussen de laatste twee vrouwen zitten, anders geldt de derde voorwaarde niet, en vanwege de eerste voorwaarde precies een boer.

Aan de derde voorwaarde kan nu niet worden voldaan: het rijtje VHBBVHBVHHBV gaat nog het meest in de goede richting, maar er zijn in dat rijtje slechts precies even veel paren H,B, zó dat de B rechts van de H ligt. Net zo kan het geval, waarbij er minstens twee heren tussen de laatste twee vrouwen zitten, worden afgehandeld.

Uitwerking opgave **19**



Zij S het snijpunt van AC en BD.

$$|XA| + |XC| \geq |AC| = |SA| + |SC|,$$

en net zo

$$|XB| + |XD| \geq |BD| = |SB| + |SD|.$$

Dus de optimale keuze voor X is S, en de gezochte waarde is

$$|SA| + |SC| + |SB| + |SD| = |AC| + |BD| = 4\,|AT|.$$

In $\triangle ATB$ geeft Pythagoras $|AT| = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$.

Uitwerking opgave **20**

Door $x = 0$ in te vullen, zien we dat n een deler is van $3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^2$. Dus 2, 3 en 5 zijn de enige priemgetallen waardoor n mogelijk deelbaar is. Door $x = 1$ in te vullen, zien we dat n een deler is van

$$(1 + 3^2)(1 + 4^2)(1 + 5^2) = 10 \cdot 17 \cdot 26 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$$

Aangezien 2, 3 en 5 de enige mogelijke priemdelers van n zijn, is n een deler van $2^2 \cdot 5 = 20$. We kunnen nu bewijzen dan $n = 20$, door aan te tonen dat 4 en 5 delers zijn van n.

Als x oneven is, zijn zowel $x^2 + 3^2$ als $x^2 + 5^2$ even. Als x even is, is $x^2 + 4^2$ deelbaar door 4. Dus $(x^2 + 3^2)(x^2 + 4^2)(x^2 + 5^2)$ is deelbaar door 4 voor elk geheel getal x. Derhalve is n deelbaar door 4.

Om aan te tonen dat n deelbaar is door 5, schrijven we x in de vorm $x = 5 \cdot q + r$, waarbij q het quotient en r de rest is bij deling van x door 5. Dus $0 \leq r \leq 4$.

- Als $r = 0$, dan is r^2 en dus ook $(5 \cdot q + r)^2 + 5^2 = x^2 + 5^2$ deelbaar door 5.
- Als $r = 1$ of $r = 4$, dan is $r^2 - 1$ en dus ook $(5 \cdot q + r)^2 + 5 \cdot 2 - 1 = x^2 + 3^2$ deelbaar door 5.
- Als $r = 2$ of $r = 3$, dan is $r^2 + 1$ en dus ook $(5 \cdot q + r)^2 + 5 \cdot 3 + 1 = x^2 + 4^2$ deelbaar door 5.

Dus $(x^2 + 3^2)(x^2 + 4^2)(x^2 + 5^2)$ is deelbaar door 5 voor elk geheel getal x. Derhalve is n deelbaar door 5.